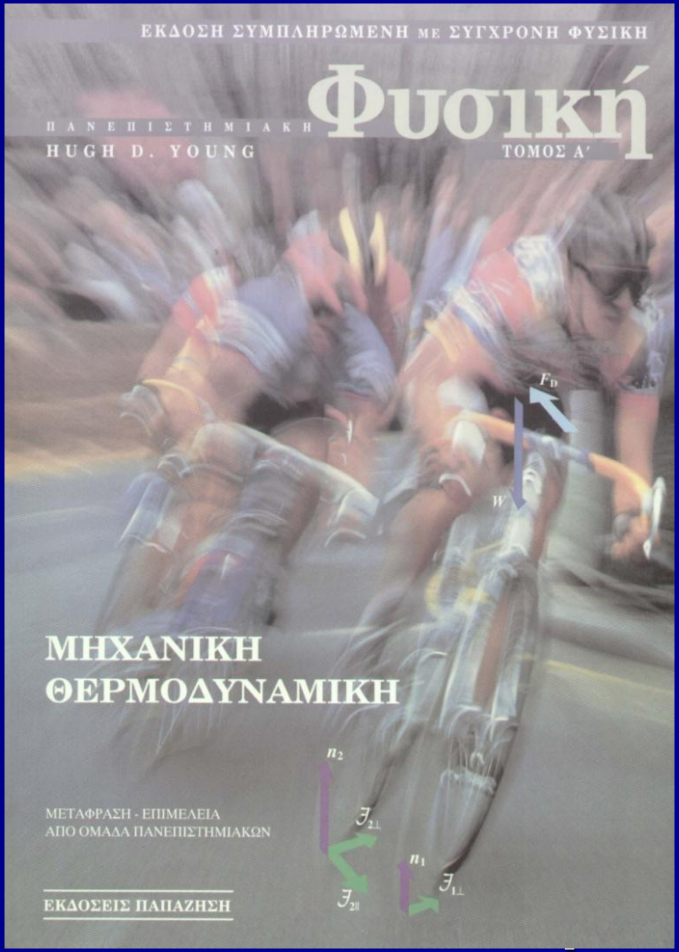
Ενημέρωση

Η διδασκαλία του μαθήματος, πολλά από τα σχήματα και όλες οι ασκήσεις προέρχονται από το βιβλίο:

«Πανεπιστημιακή Φυσική» του Hugh Young των Εκδόσεων Παπαζήση, οι οποίες μας επέτρεψαν τη χρήση των σχετικών σχημάτων και ασκήσεων



ΣΥΝΟΨΗ 1^{ου} Μαθήματος

1m, 1sec, 1kg (S.I. - 1960)

Ακρίβεια & σημαντικά ψηφεία

8.1 $\pm$ 0.1

8.1 $\pm$ 10% → 8.1 $\pm$ 0.81

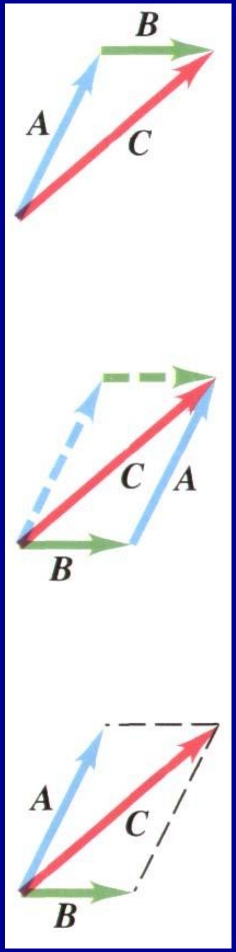
8.12432 $\pm$ 0.1 → 8. 02432 – 8. 2243

ΒΑΘΜΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ:

Αριθμητικές πράξεις

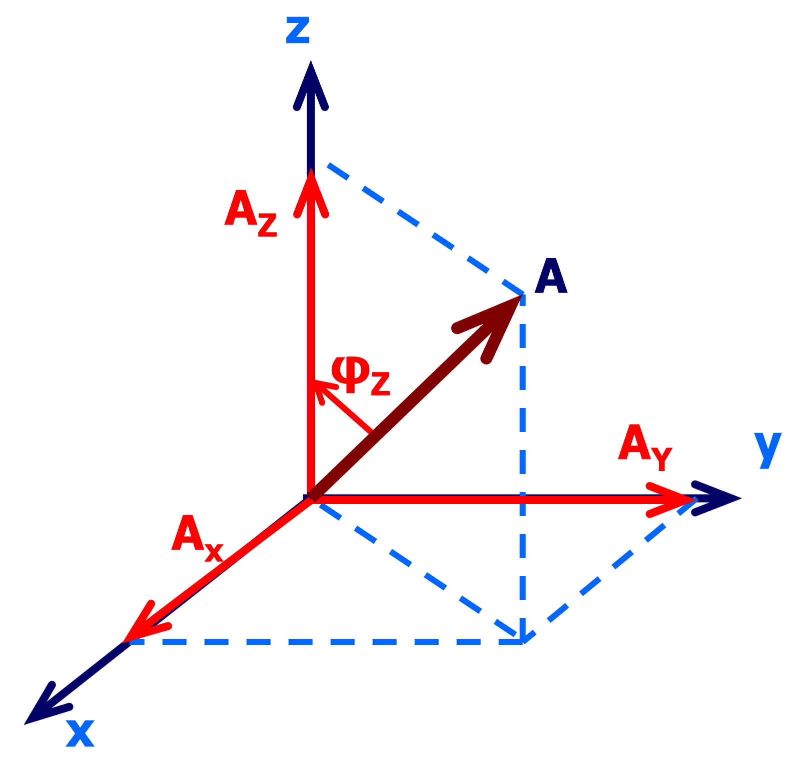
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ:

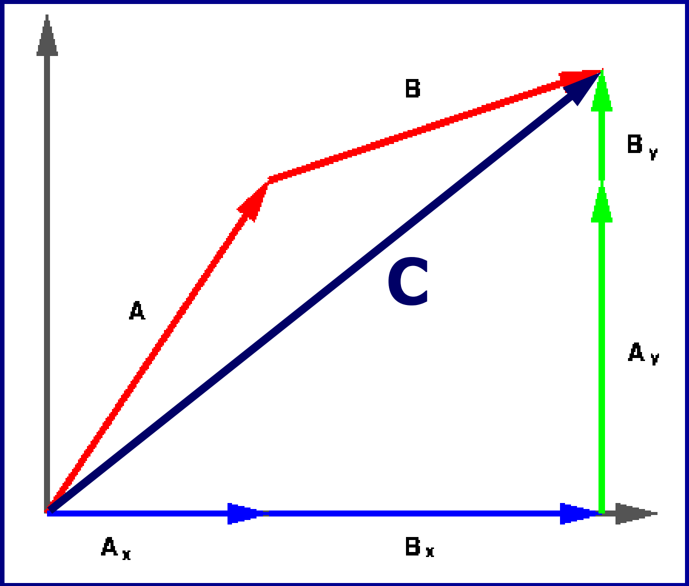
Γεωμετρικές πράξεις



ΣΥΝΟΨΗ 1ου Μαθήματος

Απλοποίηση πράξεων με τις συνιστώσες!

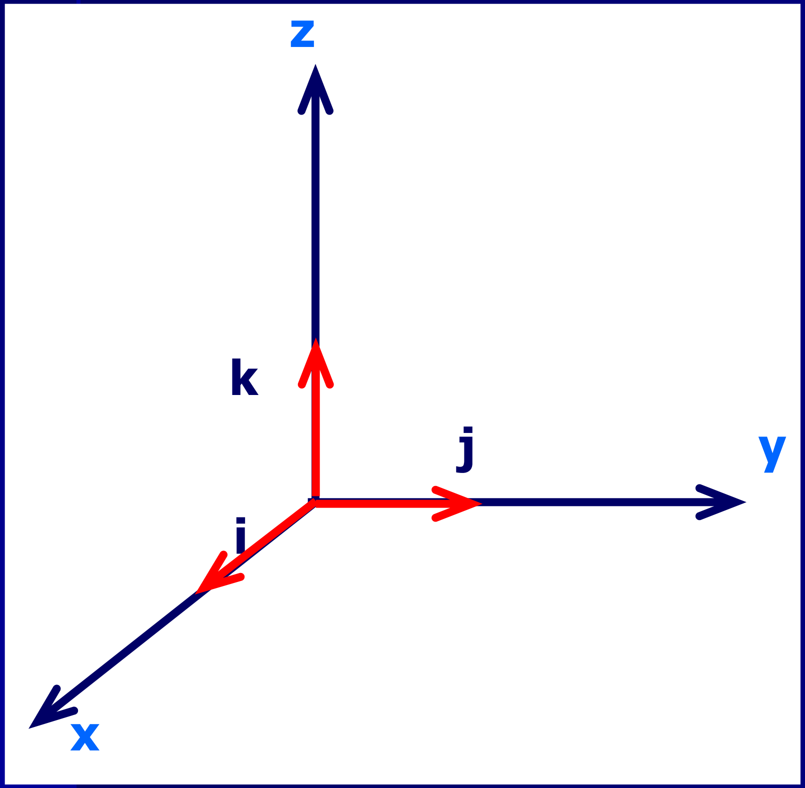




$C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$

ΣΥΝΟΨΗ 1ου Μαθήματος

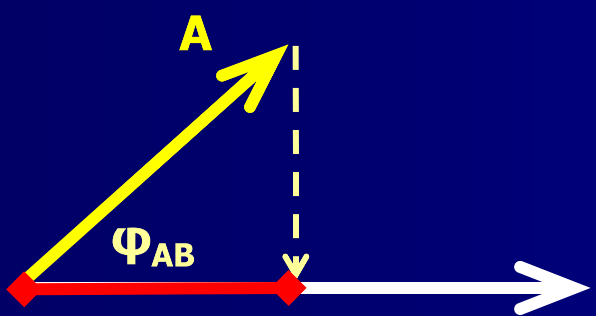
Τα μοναδιαία διανύσματα *ι, j, k,* περιγράφουν το χώρο

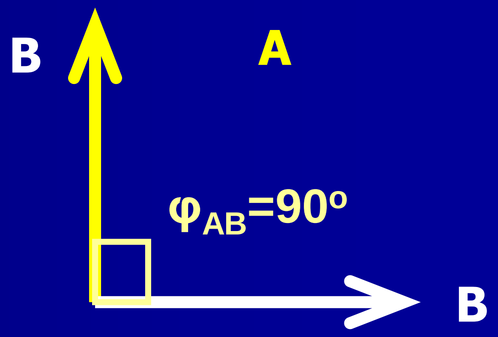


$$\vec{\mathbf{A}} = A_X\,\mathbf{i} + A_Y\,\mathbf{j} + A_Z\,\mathbf{k}$$

ΣΥΝΟΨΗ 1ου Μαθήματος

Εσωτερικό γινόμενο





$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = A\,B\cos\varphi_{AB}$$

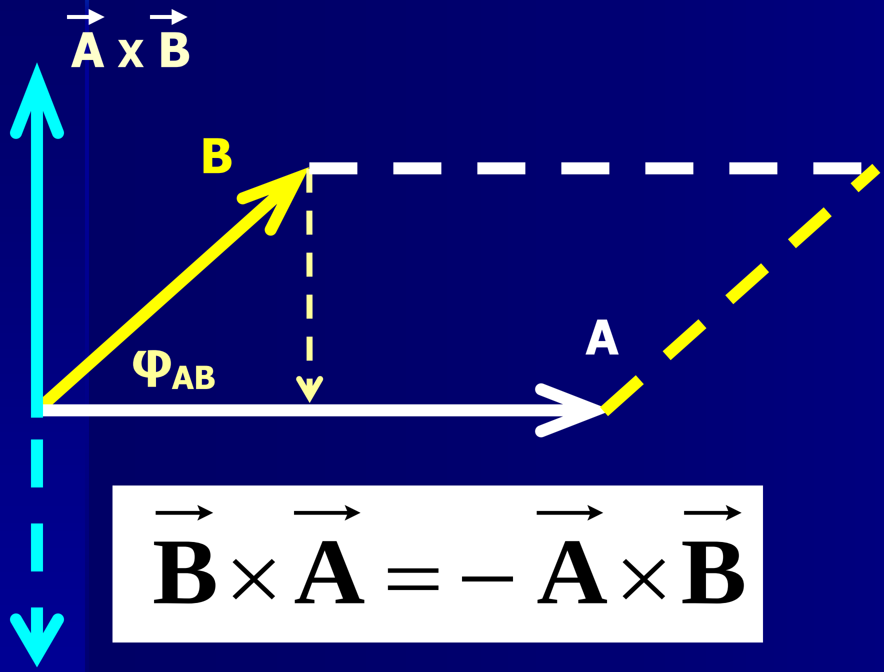
$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z$$

ΣΥΝΟΨΗ 1ου Μαθήματος

Εξωτερικό γινόμενο

$$\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = A\,B\sin\varphi_{AB}$$



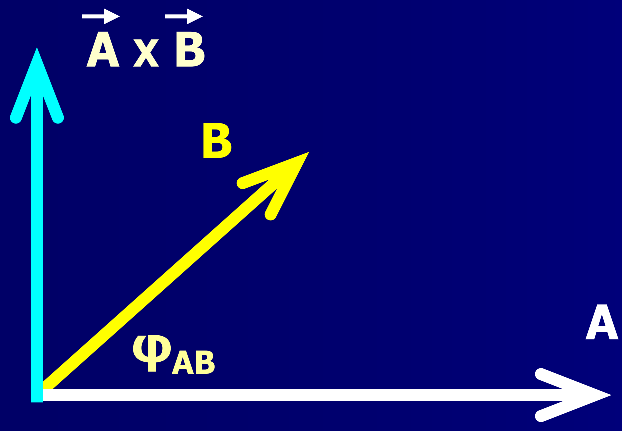
$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = -\,\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

ΣΥΝΟΨΗ 1^{ου} Μαθήματος

Εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} =$$

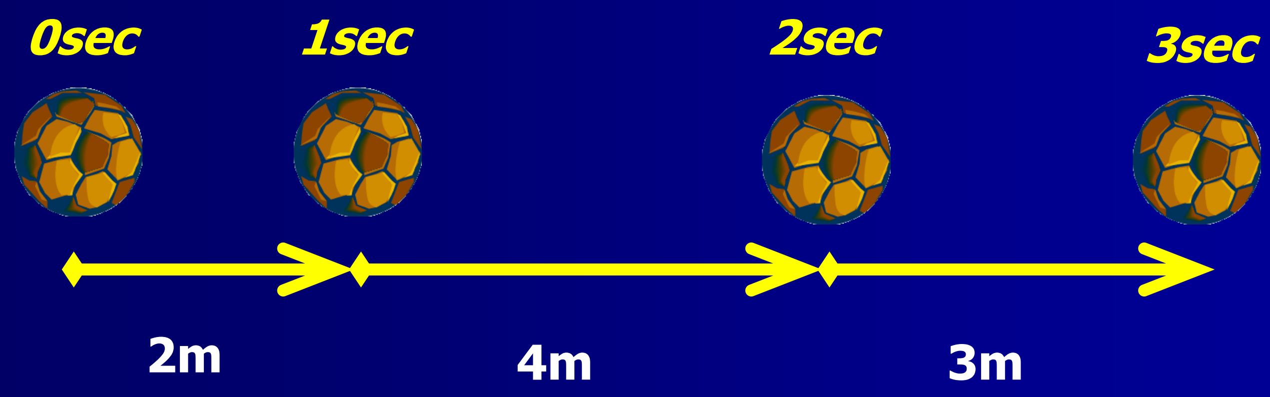
$$[(A_Y B_Z - A_Z B_Y), (A_Z B_X - A_X B_Z), (A_X B_Y - A_Y B_X)]$$



$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ - ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Ευθύγραμμη κίνηση – Μέση Ταχύτητα



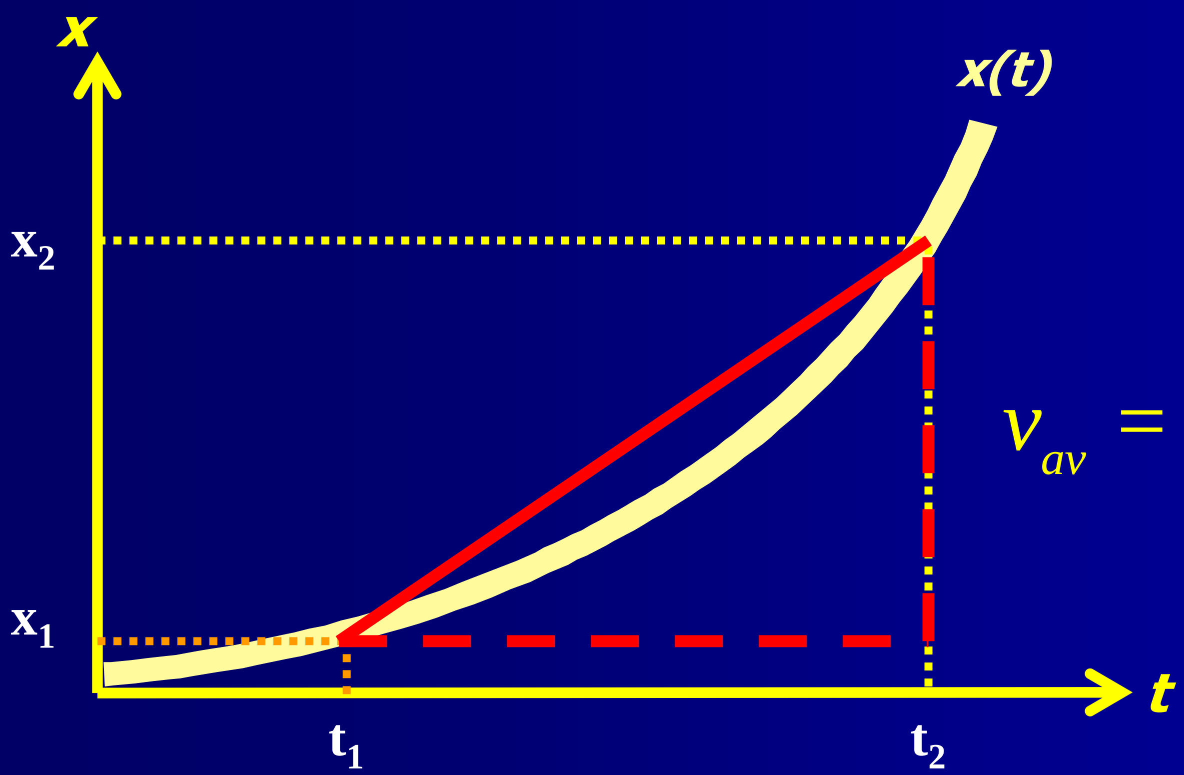
Μέση Ταχύτητα

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_{av} = \frac{9m - 0m}{3\,\mathrm{sec} - 0\,\mathrm{sec}} = 3\, {}^{m}\!/_{s}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

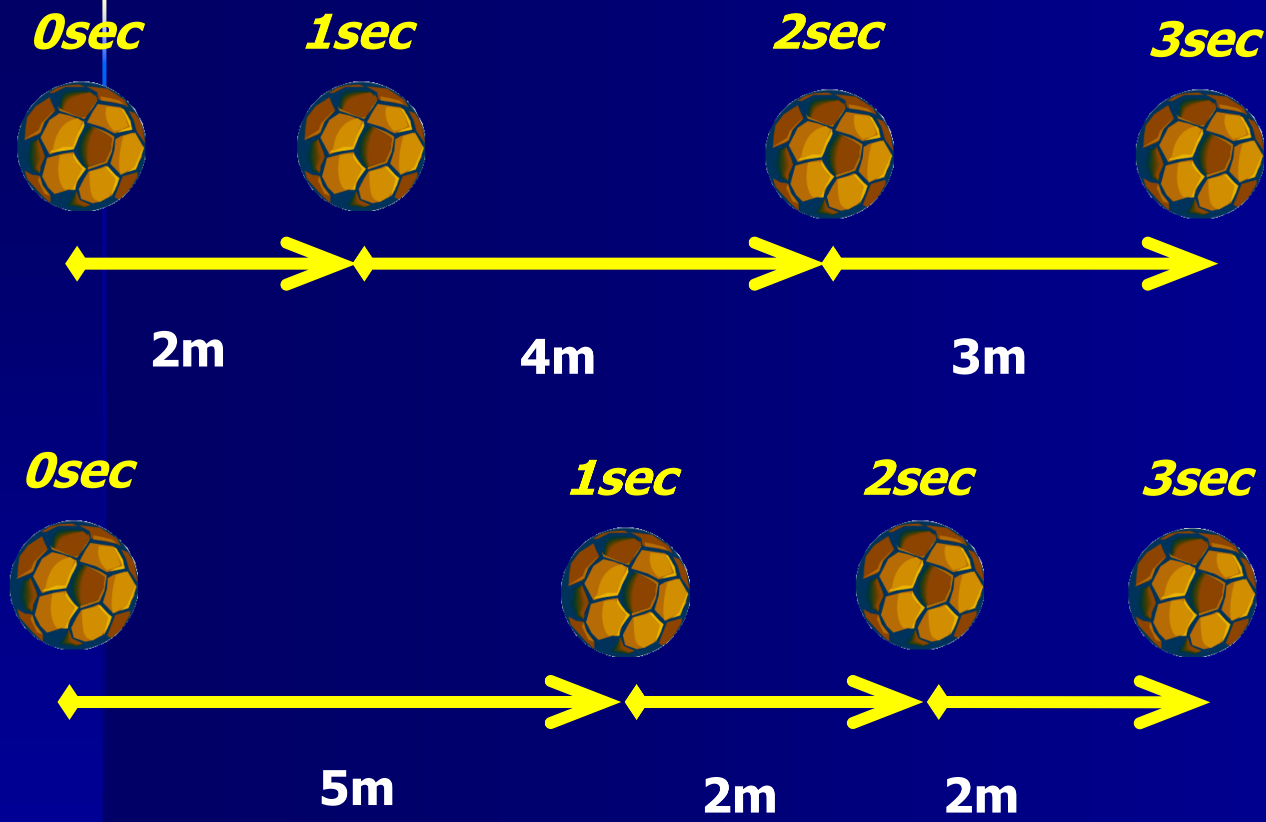
Ευθύγραμμη κίνηση – Μέση Ταχύτητα



$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ - ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Ευθύγραμμη κίνηση – Μέση Ταχύτητα



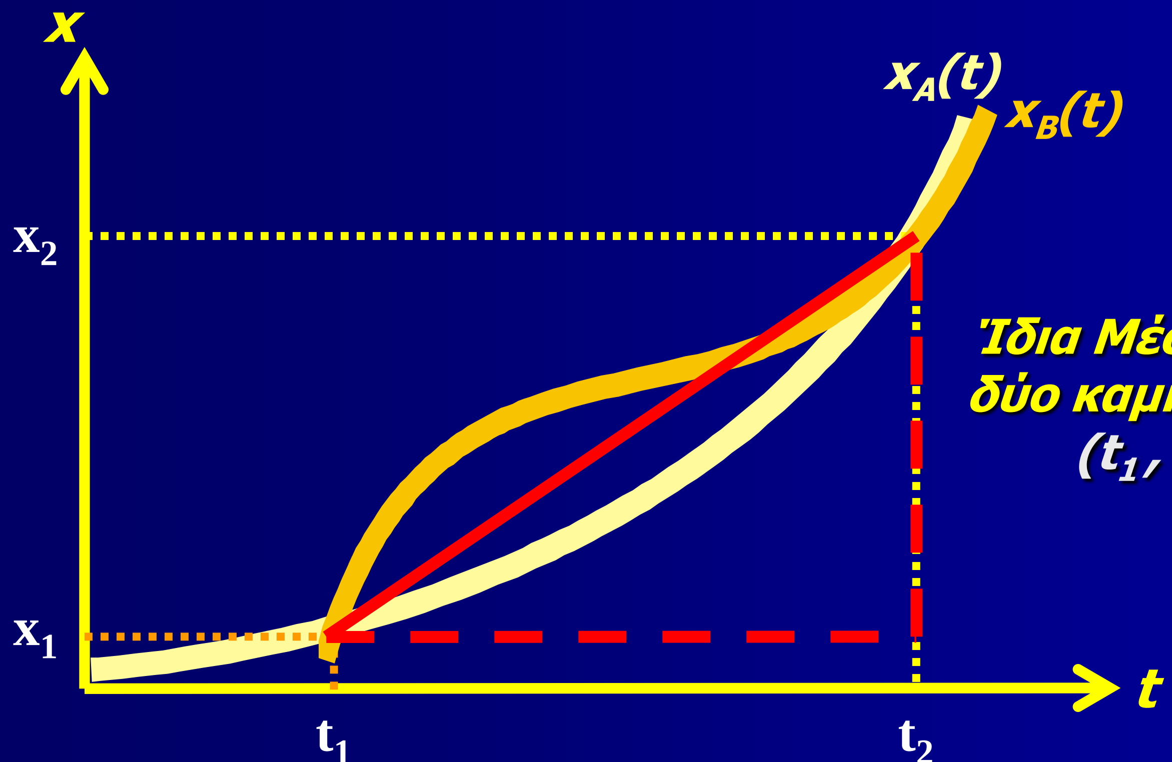
$$v_{av} = 3\,{}^{m}\!/_{s}$$

$$v_{av} = 3\,{}^{m}\!/_{s}$$

Η Μέση Ταχύτητα εξαρτάται μόνο από το αρχικό & τελικό σημείο και το χρόνο διαδρομής!

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

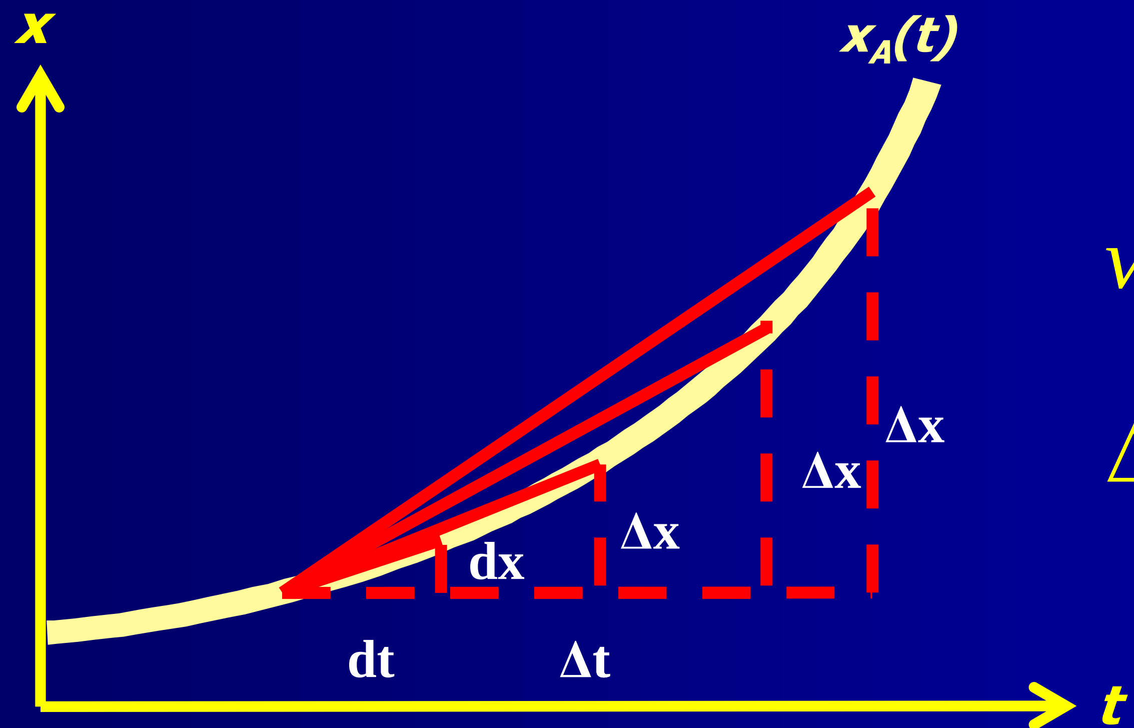
Ευθύγραμμη κίνηση – Μέση Ταχύτητα



Ίδια Μέση Ταχύτητα για τις δύο καμπύλες για τα σημεία (t_1, x_1) και (t_2, x_2)

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μέση Ταχύτητα – Στιγμιαία Ταχύτητα

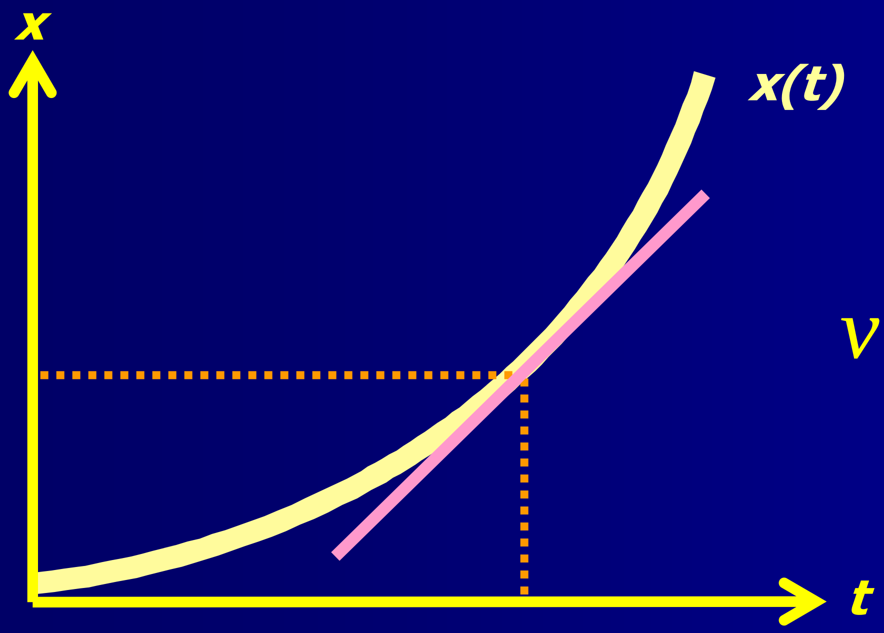


$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta t \to 0$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

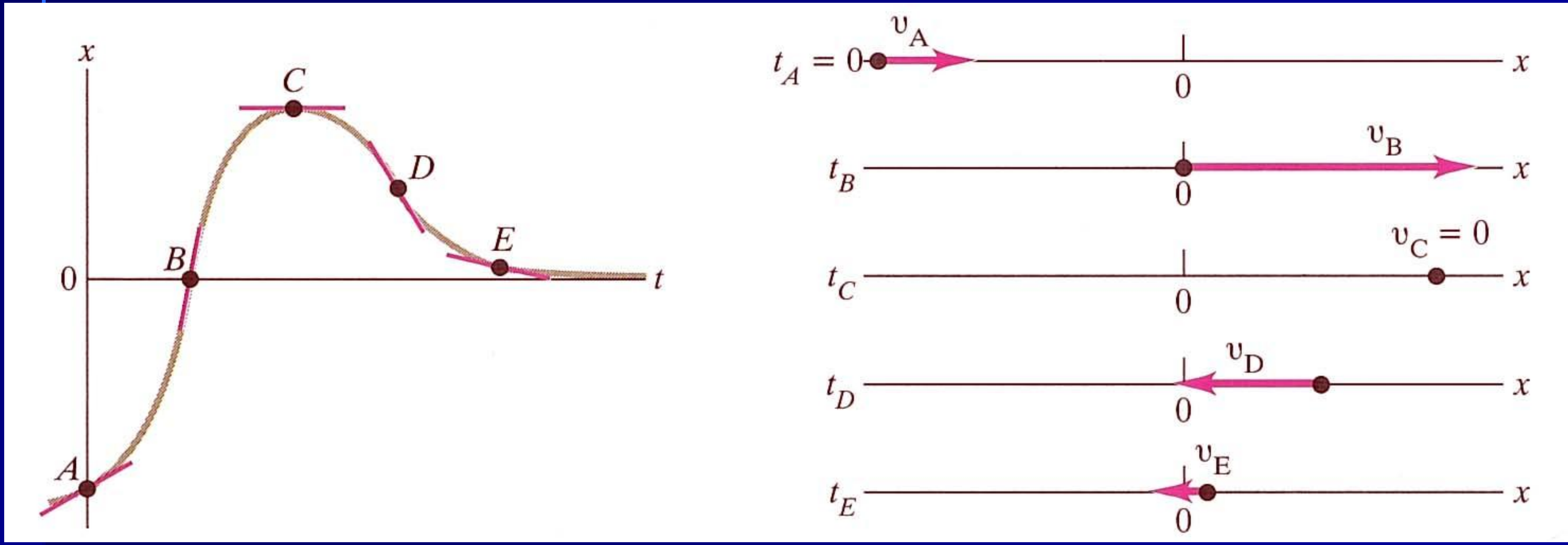
Ευθύγραμμη κίνηση – Στιγμιαία Ταχύτητα



$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

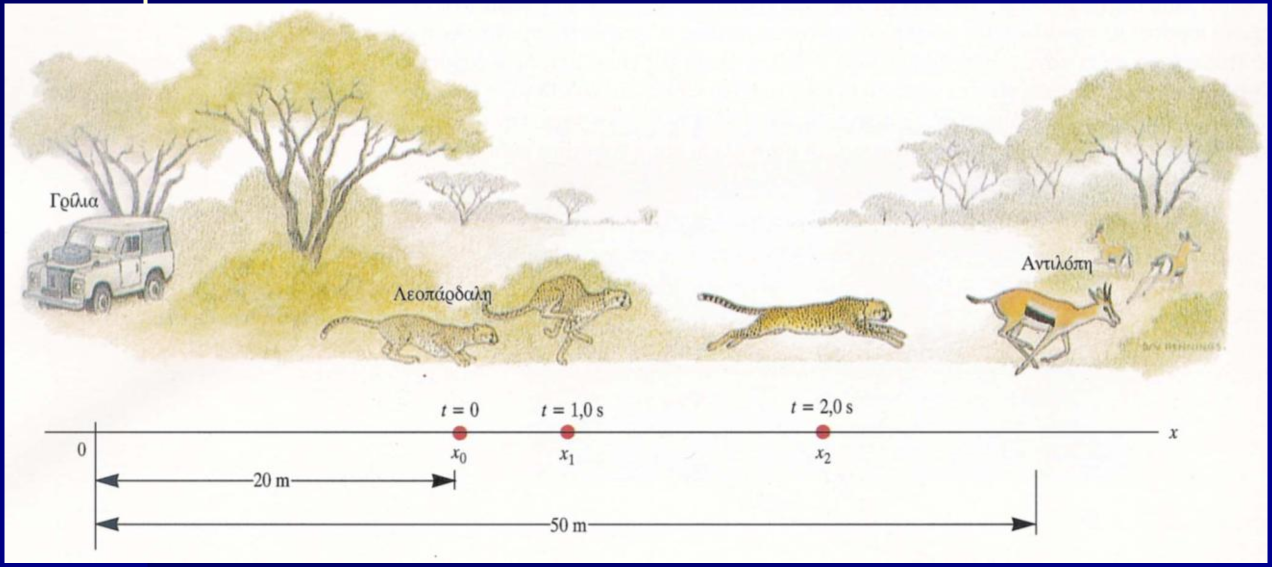
Στιγμιαία Ταχύτητα - *Παράδειγμα*



$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Στιγμιαία Ταχύτητα – *Παράδειγμα 2-1*



Εξίσωση κίνησης λεοπάρδαλης

$x(t)=20m+(5m/s^2)*t^2$

Μέση ταχύτητα λεοπάρδαλης μεταξύ 1 και 2 sec;

$x_2=20m+(5m/s^2)*(2s)^2=40m$ $x_1=20m+(5m/s^2)*(1s)^2=25m$

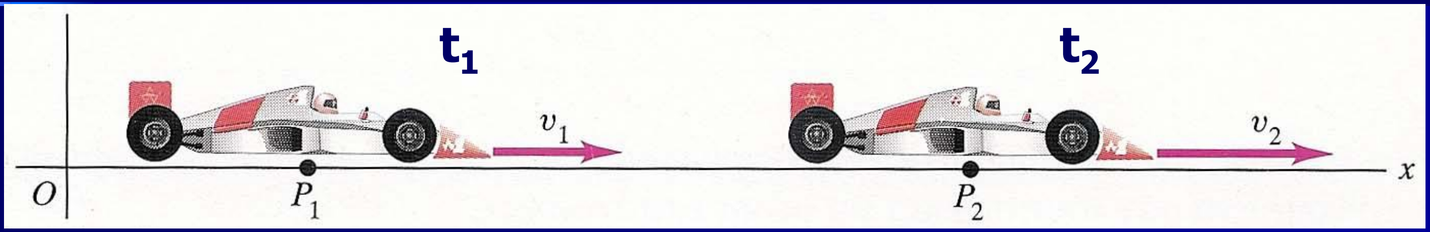
$V_{1\text{-}2sec}=(40m-25m)/(2s-1s)=15m/s$

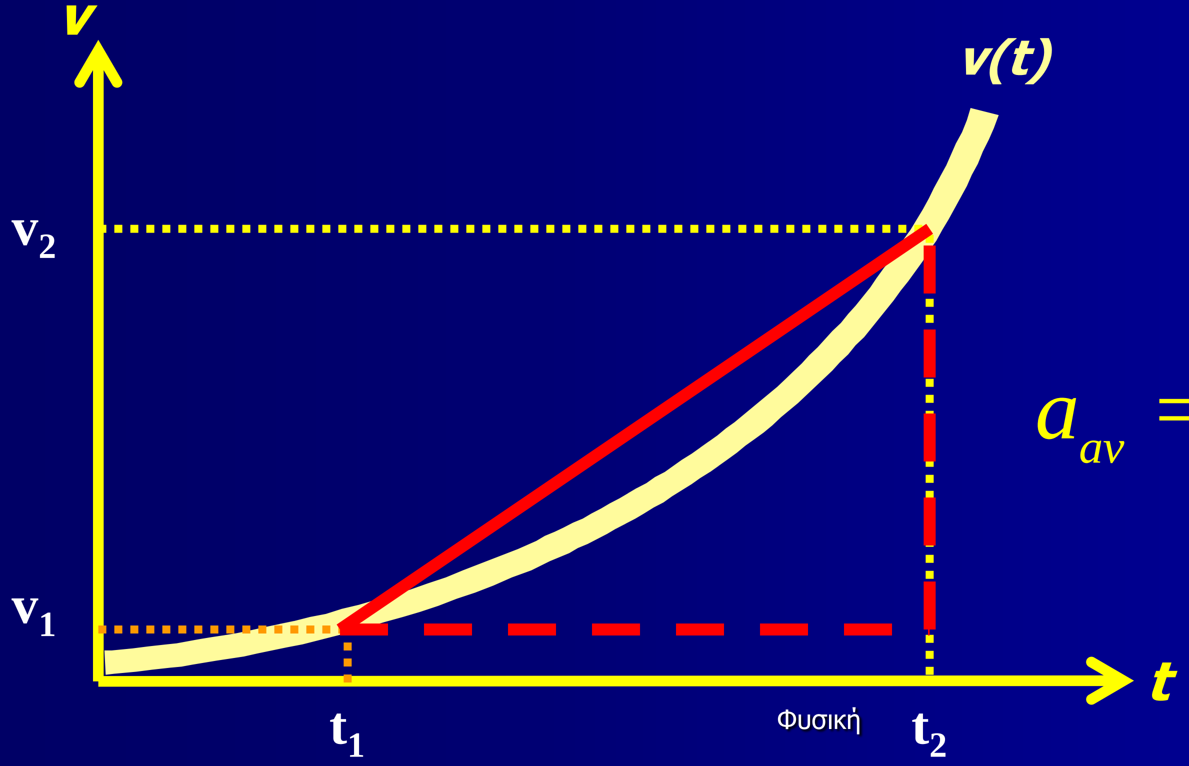
Στιγμιαία ταχύτητα λεοπάρδαλης στα 1 και 2 sec; $v = dx/dt = (10m/s)\,t$

$V_{1s}=10\ m/s$ $V_{2s}=20\ m/s$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Ευθύγραμμη κίνηση – Μέση Επιτάχυνση

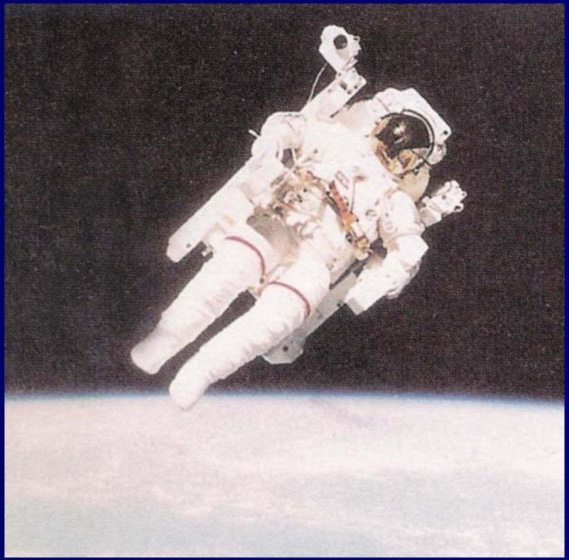




$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Επιτάχυνση

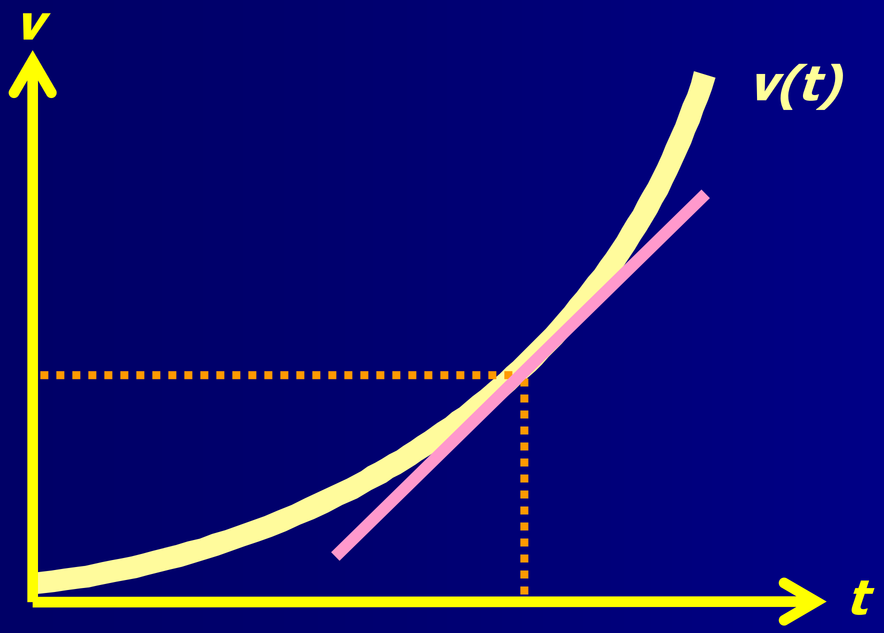


Λειτουργώντας ένα προωθητικό πύραυλο για διάστημα Δt, ο αστροναύτης προκαλεί μεταβολή στην ταχύτητα ίση με Δv=a*Δt, όπου a η σταθερή επιτάχυνση του πυραύλου

Πατώντας σταθερά το γκάζι για διάστημα Δt, ο πιλότος της F1 προκαλεί μεταβολή στην ταχύτητα ίση με Δv=a*Δt, όπου a η σταθερή επιτάχυνση του αυτοκινήτου

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Ευθύγραμμη κίνηση – Στιγμιαία Επιτάχυνση

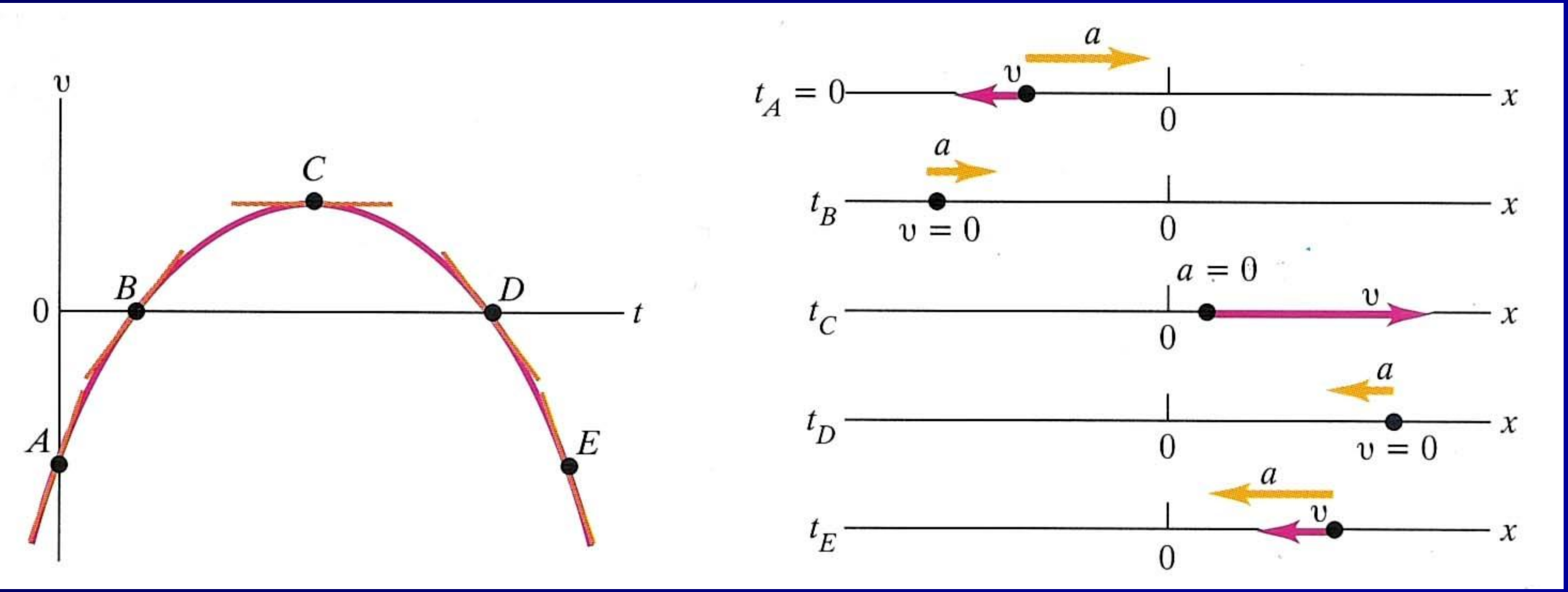


$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Στιγμιαία Επιτάχυνση - *Παράδειγμα*



$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

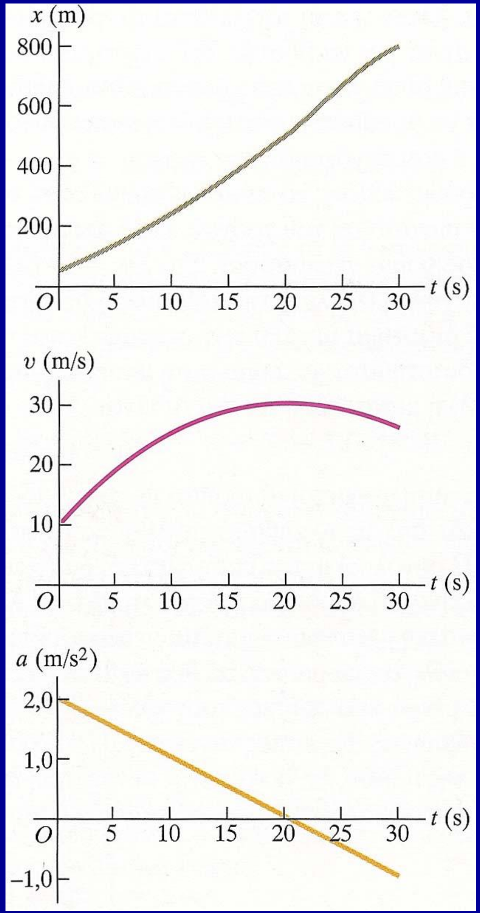
Στιγμιαία Ταχύτητα και Επιτάχυνση - *Παράδειγμα*

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

$$x = 50m + (10m/s)t + (1m/s^2)t^2 - (1/60\ m/s^3)t^3$$

$$v = dx/dt = 10m/s + (2m/s^2)t - (1/20\ m/s^3)t^2$$

$$a = d^2x/dt^2 = 2m/s^2 - (1/10\ m/s^3)t$$



ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση με σταθερή Επιτάχυνση – *Τι μορφή έχει;*

Πατώντας σταθερά το γκάζι για διάστημα Δt, ο πιλότος της F1 προκαλεί μεταβολή στην ταχύτητα ίση με Δv=a*Δt, όπου a η σταθερή επιτάχυνση του αυτοκινήτου

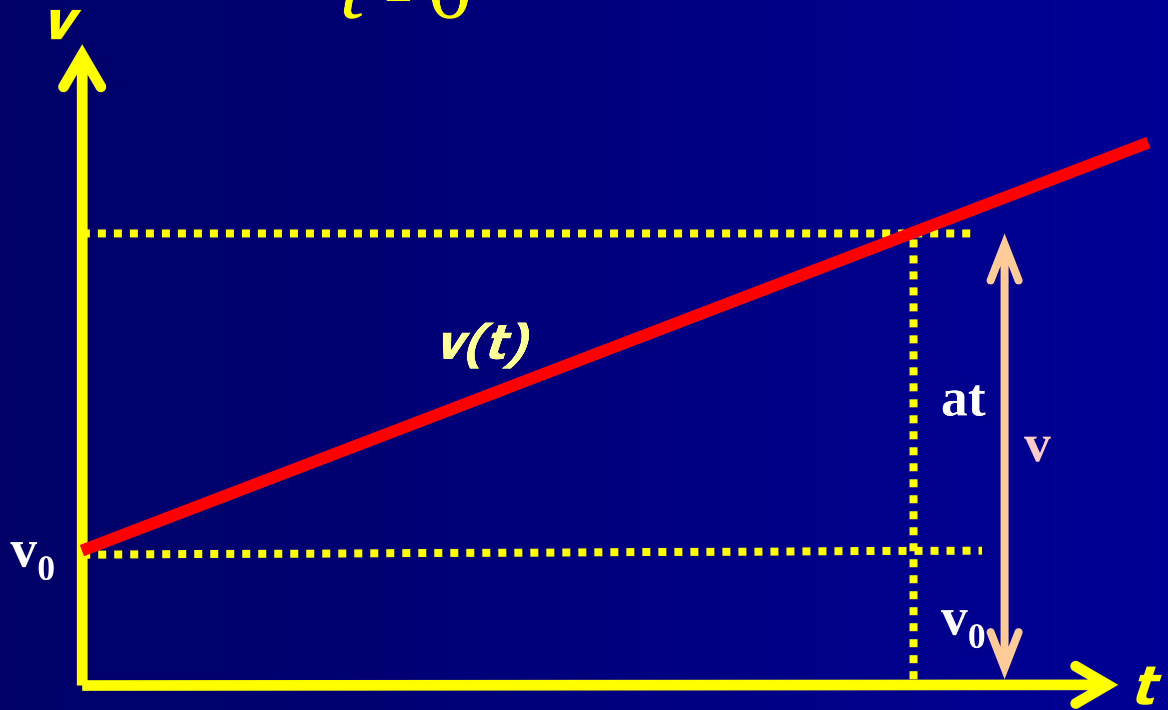
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta. = a_{av}$$

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad a_{av} = \frac{v - v_0}{t - 0} \Rightarrow v = v_0 + at$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση με σταθερή Επιτάχυνση – *Τι μορφή έχει;*

$$a_{av} = \frac{v - v_0}{t - 0} \Rightarrow v = v_0 + at$$



ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση με σταθερή Επιτάχυνση – *Τι μορφή έχει;*

$$v = v_0 + at \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

$$x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int (v_0 + at) dt = v_0 \int dt + a \int t dt \Rightarrow$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + c \qquad x(t=0) = x_0 = c$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση με σταθερή Επιτάχυνση – *Τι μορφή έχει;*

$$a = \sigma\tau\alpha\theta. \quad v = v_0 + at \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

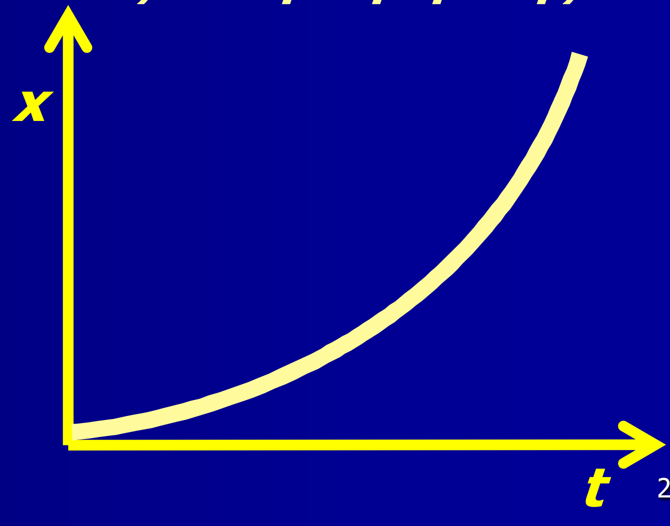
Απαλείφοντας το t:

$$v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0)$$

Απαλείφοντας το a:

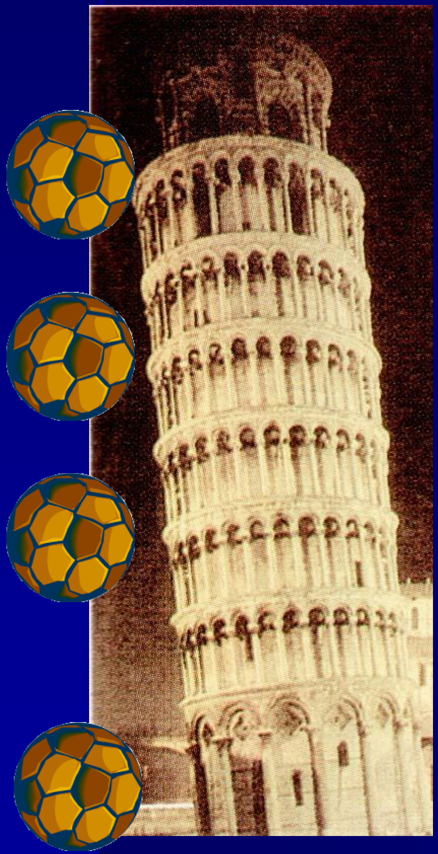
$$x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2}t$$

Εξίσωση παραβολής



ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση με σταθερή Επιτάχυνση – *Παράδειγμα: Ελεύθερη πτώση*



Όλα τα σώματα έχουν την *ίδια* επιτάχυνση κατά την ελεύθερή τους πτώση *(Γαλιλαίος)*

… για πτώση μικρή σε σχέση με την ακτίνα της Γης

… θεωρώντας μηδενική αντίσταση του αέρα

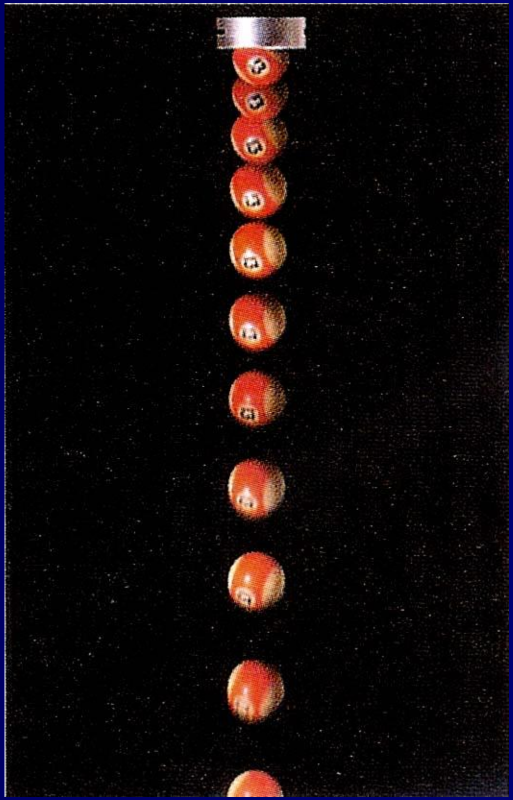
$$a = g_{\Gamma H \Sigma} = 9.8 m/s^2$$

$$g_{\Sigma E \Lambda H N H \Sigma} = 1.62 m/s^2$$

$$g_{H \Lambda I O Y} = 274 m/s^2$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση με σταθερή Επιτάχυνση –
Παράδειγμα: Κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο



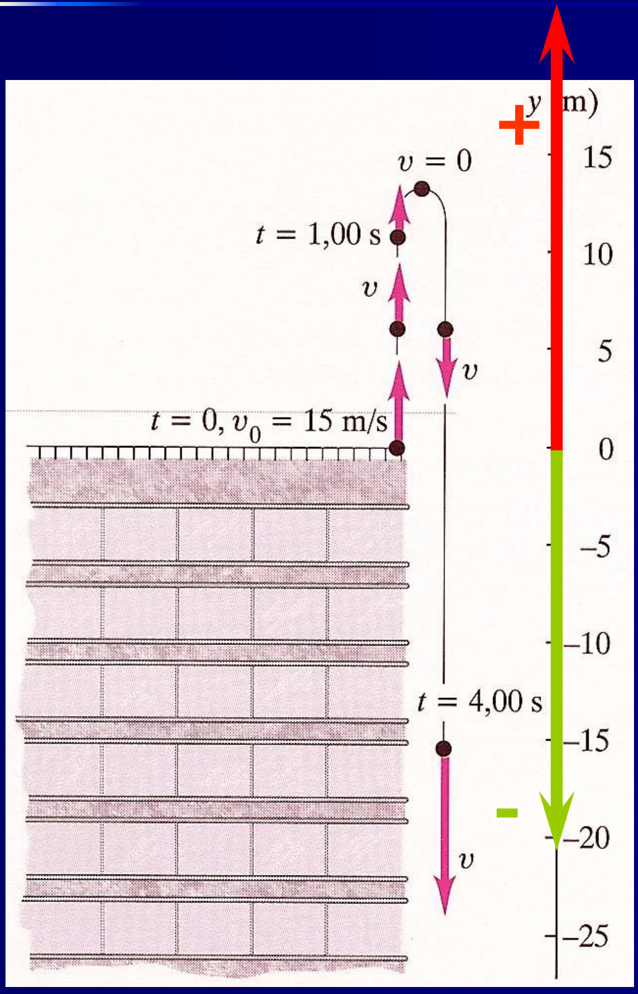
$$a = g = 9.81 m/s^2$$

$$v = v_0 + gt$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο



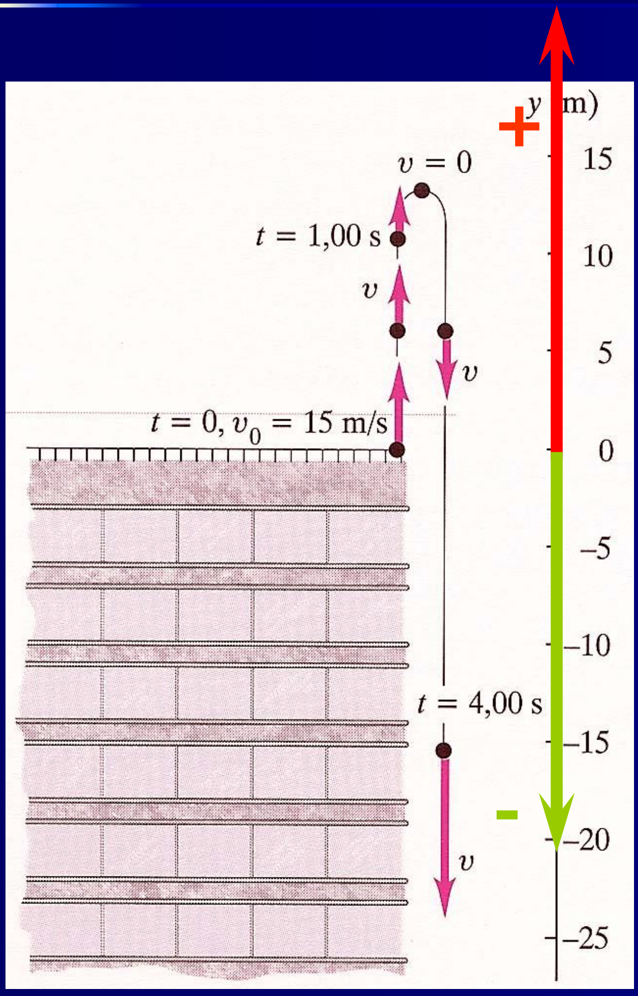
Παράδειγμα 2-7

Πετάμε μία μπάλα προς τα πάνω με v_0=15m/s. Η μπάλα ξαναπέφτει παράλληλα με το κτίριο. Α) Πού είναι η μπάλα 1s και 4s μετά τη ρίψη; Β) Τι ταχύτητα έχει η μπάλα 5m πάνω από το κτίριο; Γ) Πόσο ψηλά έφτασε η μπάλα;

Προσοχή στον καθορισμό της + και – διεύθυνσης του άξονα (*αυθαίρετη επιλογή*)

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο



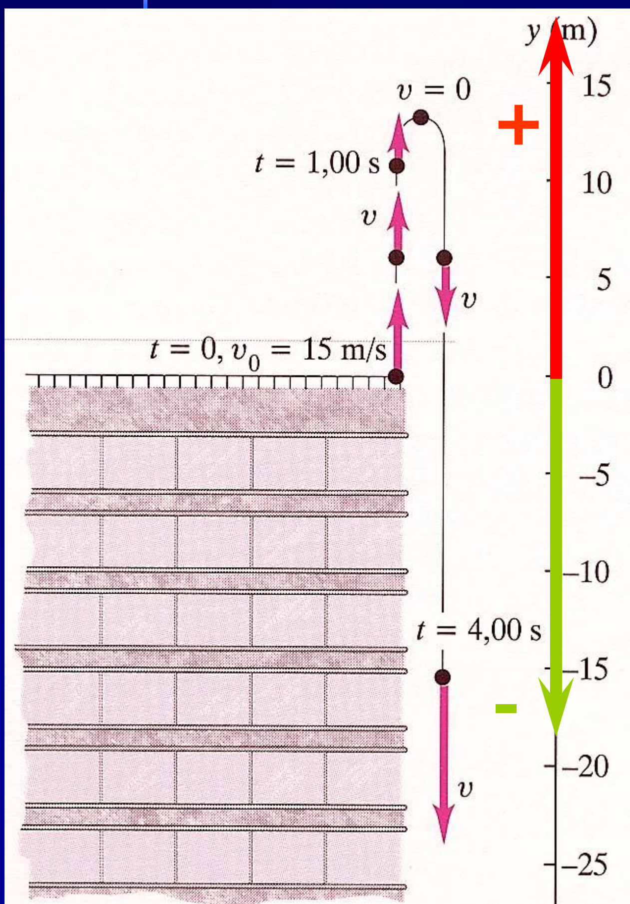
$$v = v_0 \cancel{+} gt$$

$$x = x_0 + v_0 t \cancel{+} \frac{1}{2} g t^2$$

Ο καθορισμός της + και – διεύθυνσης του άξονα επηρρεάζει το πρόσημο *όλων* των ποσοτήτων (x, v, a) σε *όλες* τις σχέσεις

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο



$y_0=0m$ $V_0=15m/s$ $a=g=-9.8m/s^2$

$$v = v_0 - gt = 15 - 9.8t$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

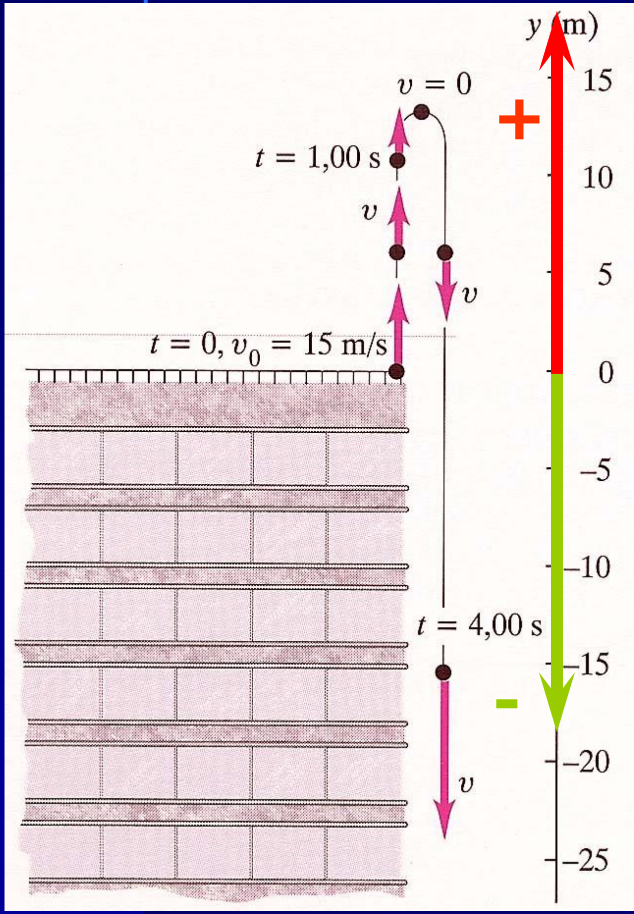
$$y = 15t - 4.9t^2$$

$$v^2 = v_0^2 - 2a(y - y_0) \Rightarrow$$

$$v^2 = 225 - 19.6y$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο



Πού είναι η μπάλα 1s και 4s μετά τη ρίψη;

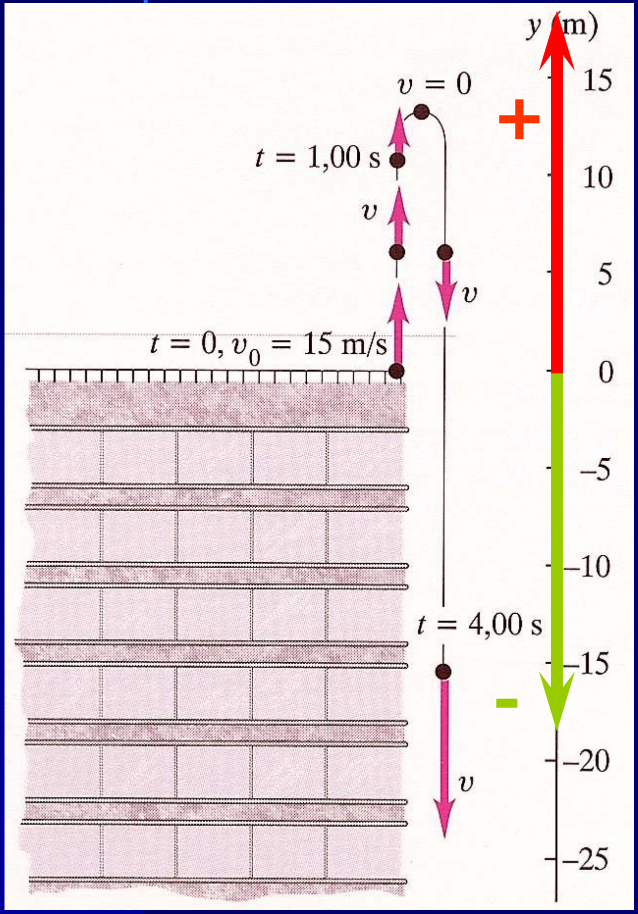
$$y = 15t - 4.9t^2$$

$$y_{1s} = 15*1 - 4.9*1^2 = 10.1m$$

$$y_{4s} = 15*4 - 4.9*4^2 = -18.4m$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο



Τι ταχύτητα έχει η μπάλα 5m πάνω από το κτίριο;

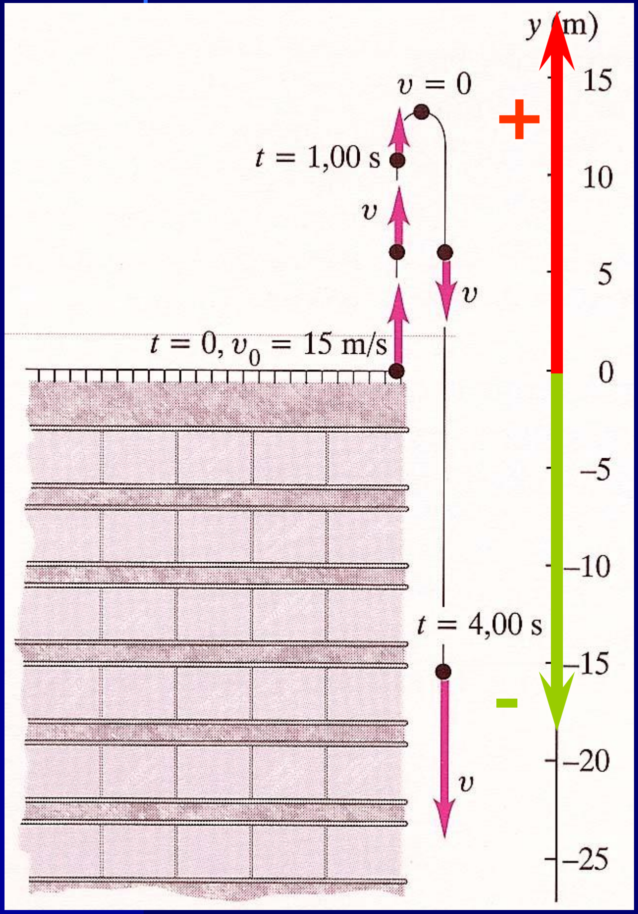
$$v^2 = v_0^2 - 2a(y - y_0) \Rightarrow$$

$$v^2 = 225 - 19.6y$$

$$v_{5m} = \sqrt{225 - 19.6 * 5} = 11.27 m/s$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο



Πόσο ψηλά έφτασε η μπάλα;

Στο ψηλότερο σημείο v=0m/s !

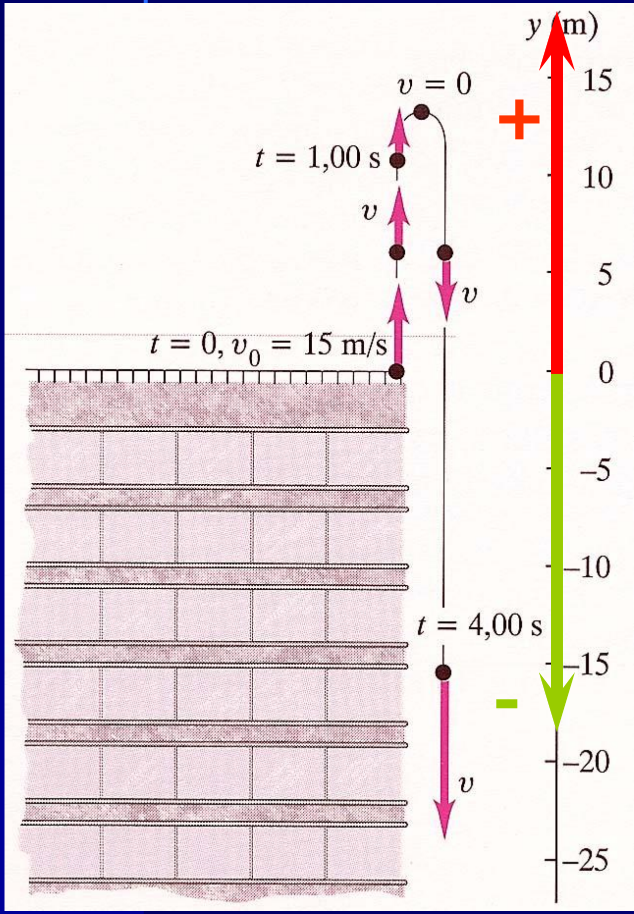
$$v^2 = 225 - 19.6y$$

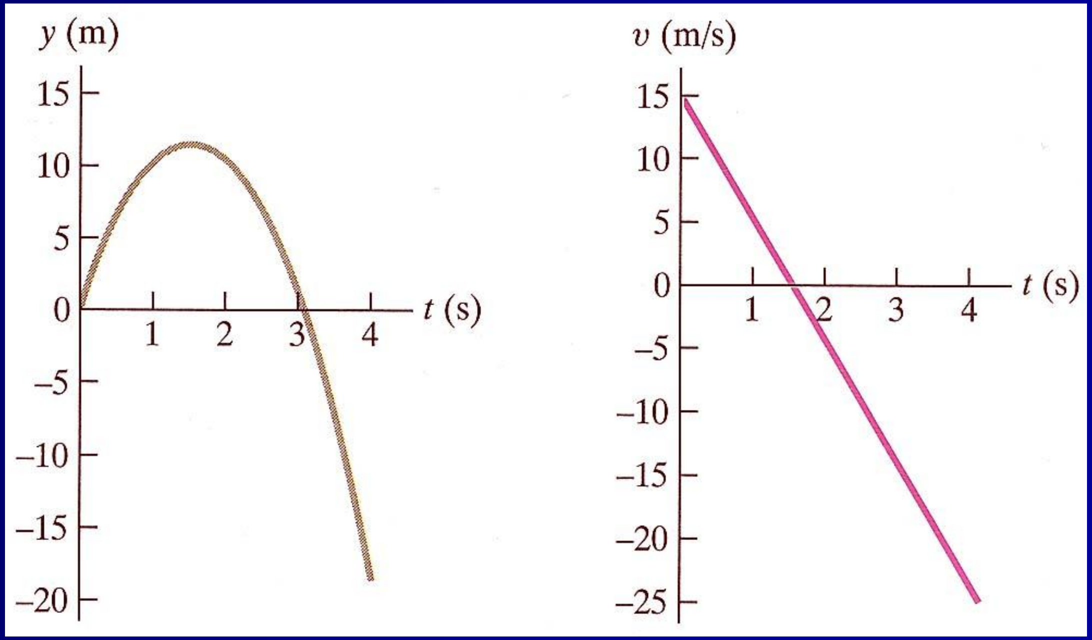
$$0 = 225 - 19.6y_{\max} \Rightarrow$$

$$y_{\max} = \frac{225}{19.6} = 11.48m$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο



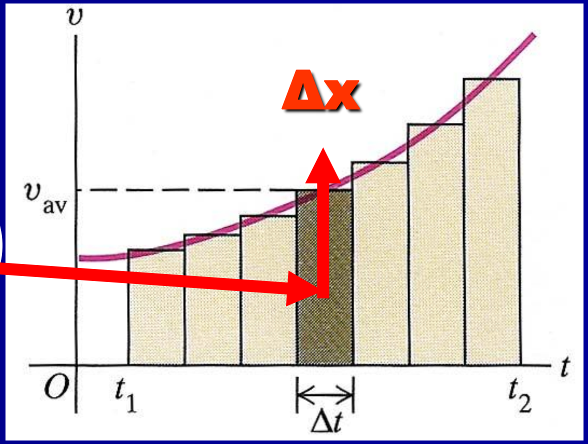


ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μετάθεση και ταχύτητα από ολοκλήρωση

$$x(t) = \int dx = \int \frac{dx}{dt} dt = \int v dt$$

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

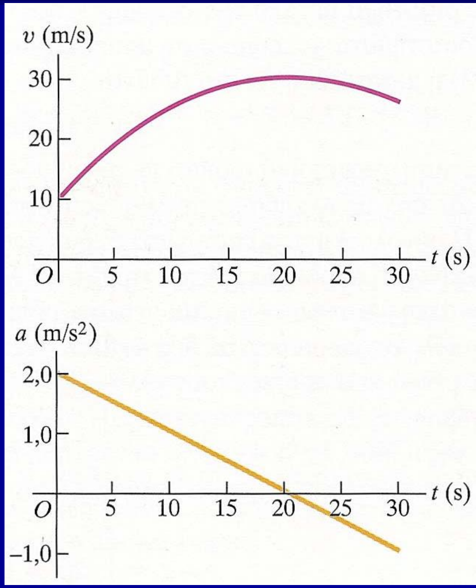


$$x - x_0 = \int_0^t v dt \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t v dt$$

$$v = v_0 + \int_0^t a dt$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Στιγμιαία Ταχύτητα και Επιτάχυνση - *Παράδειγμα*



$$v = v_0 + \int_0^t a\,dt$$

$a = d^2x/dt^2 = 2m/s^2 - (1/10\ m/s^3)t$

$v_0=10m/sec \quad x_0=50m \quad (t=0s)$

$$v = v_0 + \int_0^t a\,dt = 10 + \int_0^t (2-0.1t)\,dt \Rightarrow$$

$$v = 10 + [2t]_0^t - \frac{0.1}{2}[t^2]_0^t = 10 + 2(t-0) - 0.05(t^2 - 0^2) \Rightarrow$$

$$v = 10m/s + (2m/s^2)t - (\tfrac{1}{20}m/s^3)t^2$$

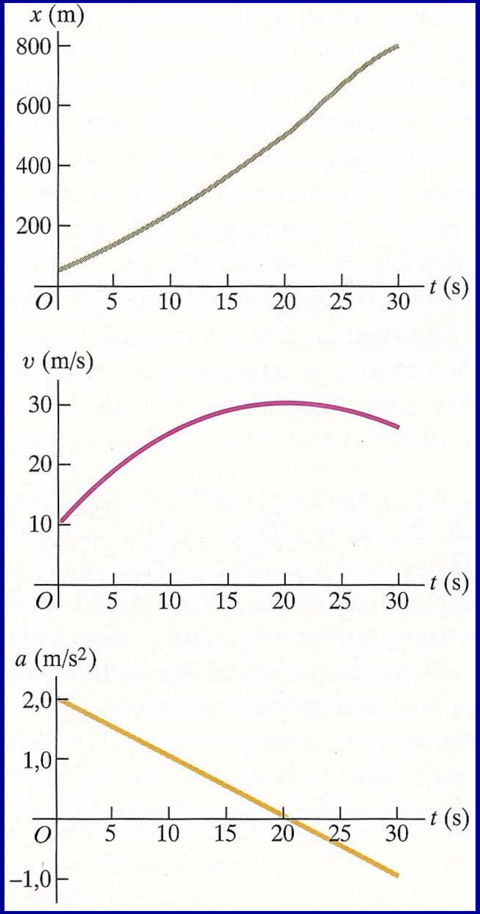
ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Στιγμιαία Ταχύτητα και Επιτάχυνση - *Παράδειγμα*

$$x = x_0 + \int_0^t v dt$$

$v = dx/dt = (2m/s^2)t - (1/20\ m/s^3)t^2$

$x_0 = 50m$



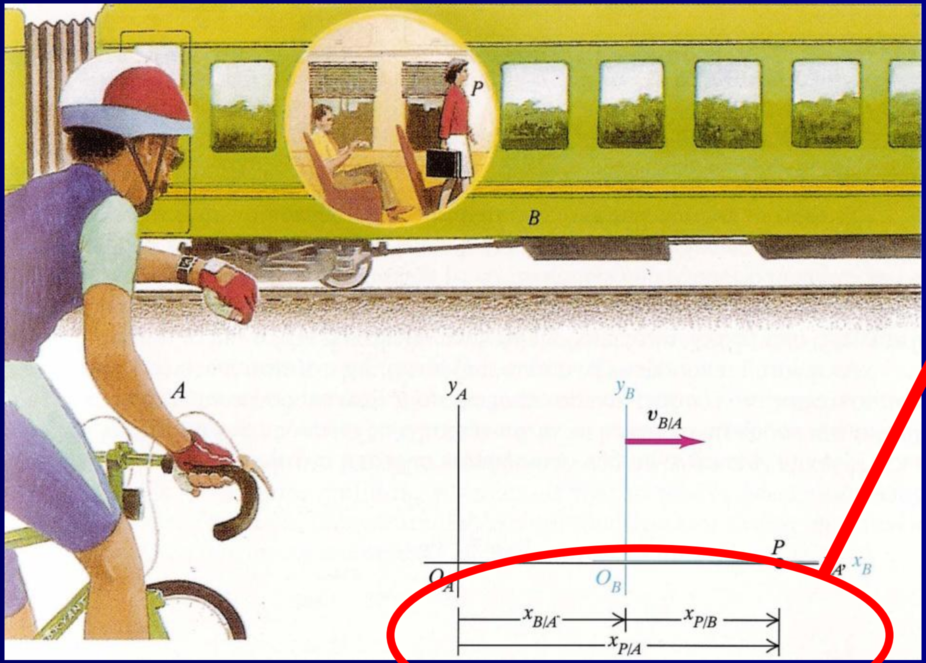
$$x = x_0 + \int_0^t v dt = 50 + \int_0^t (2t - 0.2t^2)dt \Rightarrow$$

$$x = 50 + [t^2]_0^t - \frac{0.1}{2*3}[t^3]_0^t \Rightarrow$$

$$x = 50m + (1m/s^2)t^2 - (\frac{1}{60}m/s^3)t^3$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Σχετική Ταχύτητα



$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A}$$

Τα διαφορικά δίνουν:

$$dx_{P/A} = dx_{P/B} + dx_{B/A}$$

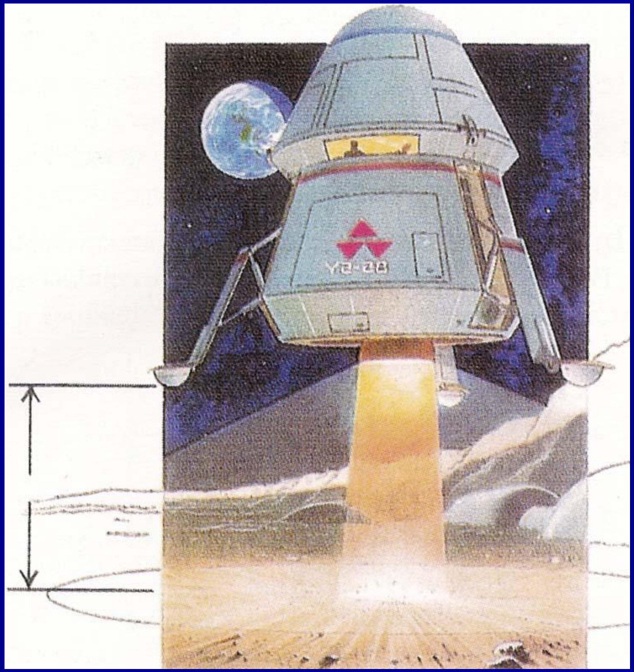
Η διαίρεση με Δt δίνει:

$$v_{P/A} = v_{P/B} + v_{B/A}$$

Ανάγκη εισαγωγής του συστήματος αναφοράς!

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Άσκηση 2-22
Σεληνάκατος κατεβαίνει ελεγχόμενα λόγω της προωθητικής μηχανής. Σε ύψος 5m έχει ταχύτητα 2m/s προς τα κάτω και ο πιλότος σβήνει τη μηχανή. Με τι ταχύτητα ακουμπάει στο έδαφος; ($g_{ΣΕΛΗΝΗΣ}$=1.6m/s²)



Η πιο εύκολη λύση είναι με τη σχέση:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

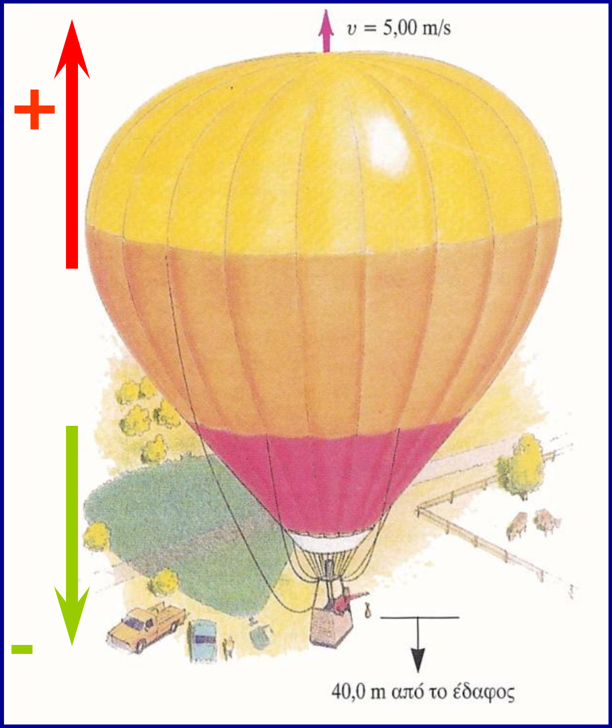
$$a = g_{ΣΕΛΗΝΗΣ} = 1.6m/s^2 \quad x - x_0 = 5m$$

$$v^2 = 2^2 + 2*1.6*5 = 20 \Rightarrow v = 4.47m/s$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Άσκηση 2-28

Αερόστατο θερμού αέρα ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα 5m/s. Στα 40m ο χειριστής πετάει ένα σακί άμμο. Α) Τι θέση και ταχύτητα θα έχει το σακί 0.5 και 2s μετά; Β) Πότε θα χτυπήσει το σακί το έδαφος και με ποια ταχύτητα;



Πρώτο βήμα ο καθορισμός (αυθαίρετα) της θετικής διεύθυνσης π.χ.

Απαραίτητο είναι να γνωρίζουμε από πού μετράμε αποστάσεις, π.χ. από το έδαφος

Με βάση τα παραπάνω, το σακί έχει αρχική ταχύτητα και θέση:

$$v_0 = 5m/s \qquad x_0 = 40m$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

v_0 = 5m/s x_0 =40m

$$v = v_0 - gt \qquad x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

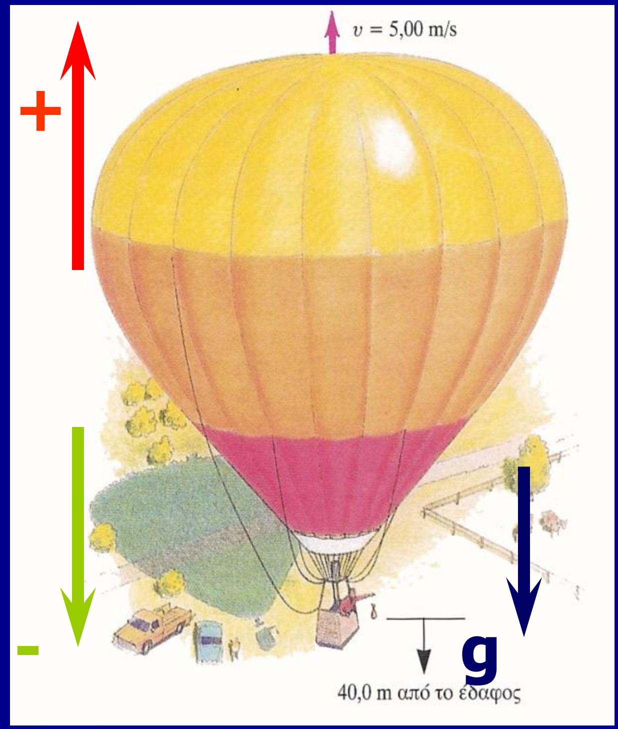
Το –g επιβάλλεται γιατί η βαρύτητα είναι αντίθετη με τη θετική διεύθυνση που επιλέξαμε

$$v_{0.5s} = 5 - 9.8 * 0.5s = 0.2m/s$$

$$x_{0.5s} = 40 + 5 * 0.5 - \frac{1}{2} 9.8 * 0.5^2 = 41.28m$$

$$v_{2s} = 5 - 9.8 * 2s = -14.6m/s$$

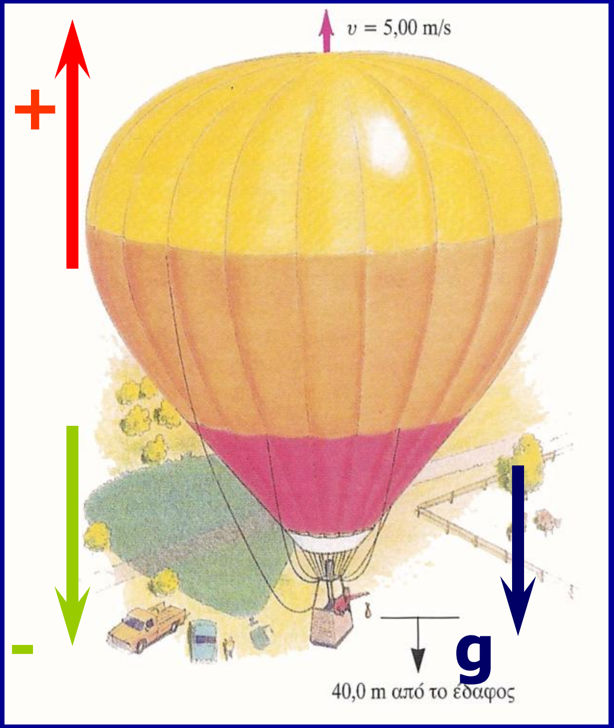
$$x_{2s} = 40 + 5 * 2 - \frac{1}{2} 9.8 * 2^2 = 30.4m$$



ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

$$v = v_0 - gt \qquad x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

v_0 = 5m/s x_0 =40m



Στο έδαφος x=0m, οπότε:

$$0m = 40 + 5 * t - \frac{1}{2} 9.8 * t^2 \Rightarrow$$

$$t_{\text{ΕΔΑΦΟΣ}} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4(\frac{1}{2} 9.8) 40}}{2(-\frac{1}{2} 9.8)} = 3.41 s$$

$$v_{\text{ΕΔΑΦΟΣ}} = 5 - 9.8 * 3.41 = -28.42 m / s$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μετάθεση-Ταχύτητα στις 3 διαστάσεις

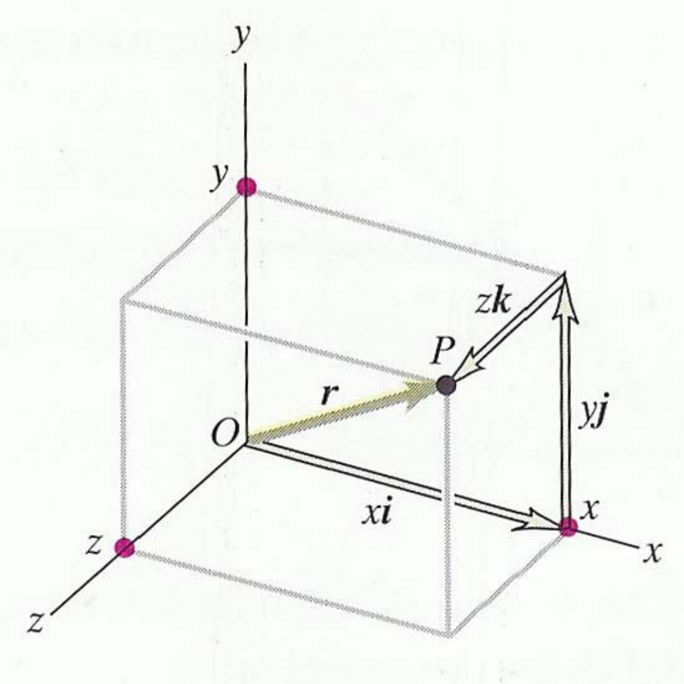
Που είμαστε στο χώρο;

Στο σημείο (x, y, z) !!!

Διάνυσμα θέσης

$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\vec{\mathbf{r}} \qquad (x, y, z)$$

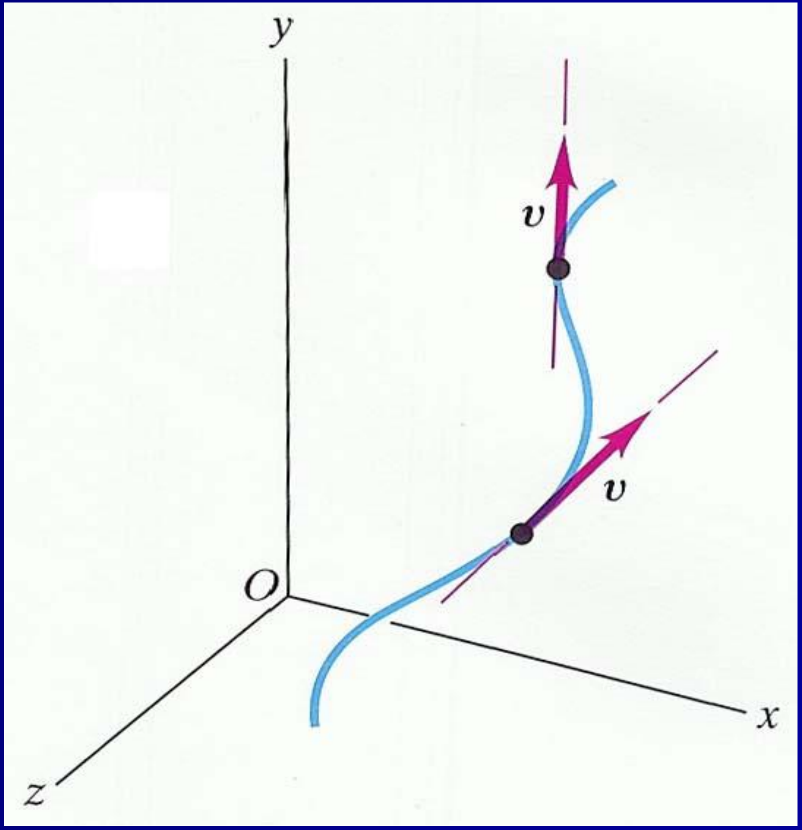


ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μετάθεση-Ταχύτητα στις 3 διαστάσεις

Μέση Ταχύτητα

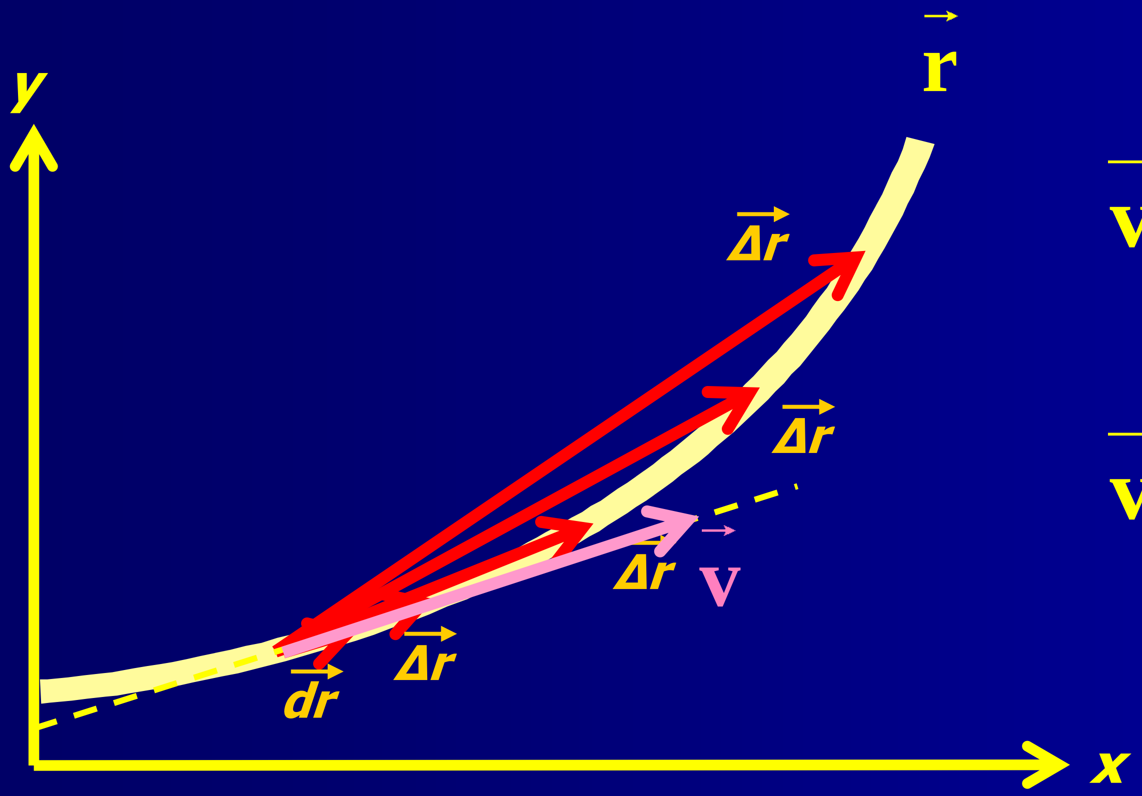
$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{av}} = \frac{\vec{\mathbf{r}_2} - \vec{\mathbf{r}_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{\Delta \mathbf{r}}}{\Delta t}$$



$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta \mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{dr}}}{dt}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μετάθεση-Ταχύτητα στις 3 διαστάσεις



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μετάθεση-Ταχύτητα στις 3 διαστάσεις

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{dr}}}{dt} \qquad \vec{\mathbf{r}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

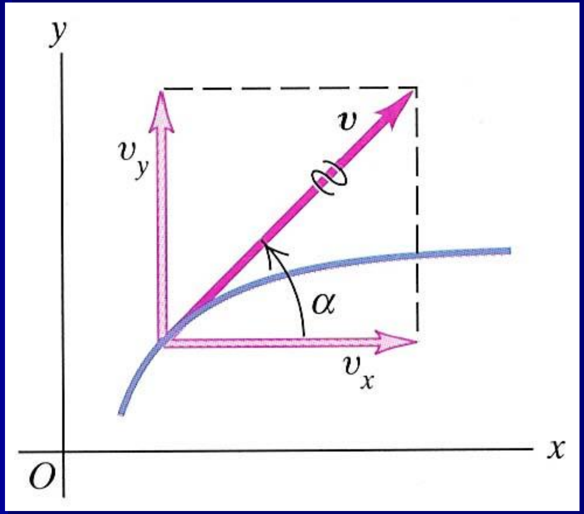
$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μετάθεση-Ταχύτητα στις 3 διαστάσεις

$$\left|\vec{\mathbf{v}}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

π.χ. σε 2 διαστάσεις

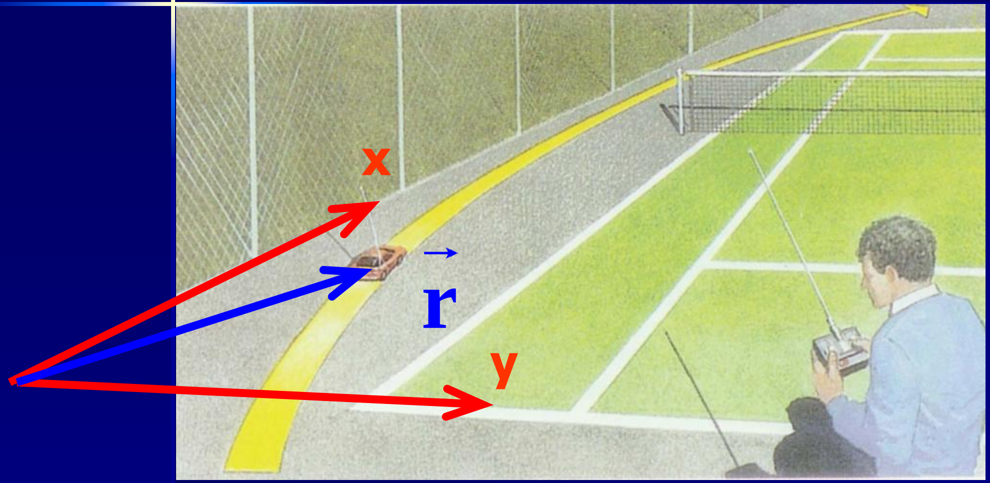


$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

$$\left|\vec{\mathbf{v}}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μετάθεση-Ταχύτητα στις 3 διαστάσεις



Παράδειγμα 3-1

$x = x(t) = 3 + 2t^2 \quad y = y(t) = 10t + 0.25t^3$

Που είναι το αυτοκίνητο για t=2s;

$x = 3 + 2 * 2^2 = 11m$

$y = 10 * 2 + 0.25 * 2^3 = 22m$

$$\vec{\mathbf{r}}_{2s} = (11m)\,\mathbf{i} + (22m)\,\mathbf{j}$$

Ποια η μετατόπιση του αυτοκίνητου και η μέση ταχύτητα από t=0s ως t=2s;

$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = (3 + 2t^2)\mathbf{i} + (10t + 0.25t^3)\mathbf{j}$$

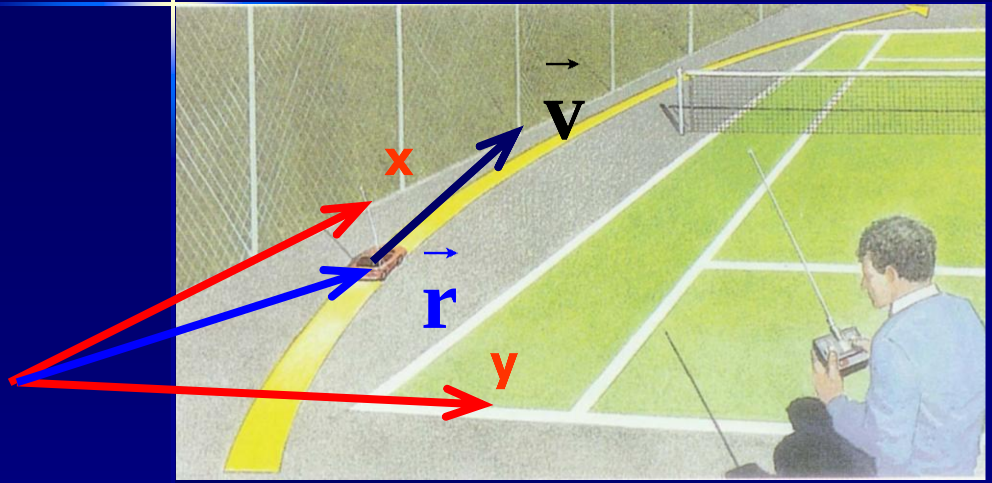
$$\vec{\mathbf{r}}_{0s} = 3\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{2s} = 11\mathbf{i} + 22\mathbf{j}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{av}^{\,0-2s} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1}{t_2 - t_1} = (4m/s)\mathbf{i} + (11m/s)\mathbf{j}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μετάθεση-Ταχύτητα στις 3 διαστάσεις



$$\vec{\mathbf{r}} = (3 + 2t^2)\mathbf{i} + (10t + 0.25t^3)\mathbf{j}$$

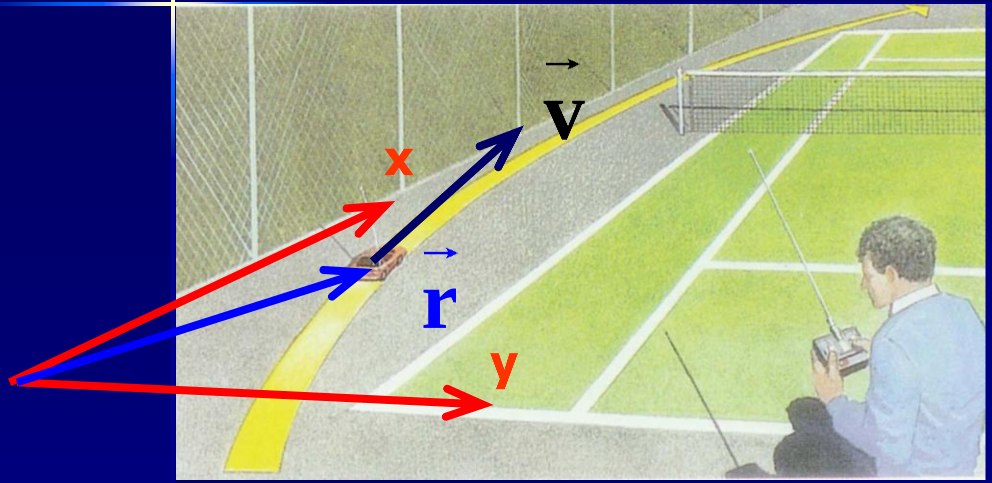
Ποια η στιγμιαία ταχύτητα του αυτοκίνητου και πόση είναι στα t=2s;

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = (4t)\mathbf{i} + (10 + 0.75t^2)\mathbf{j} \qquad \left|\overrightarrow{\mathbf{v}_{2s}}\right| = \sqrt{8^2 + 13^2} = 15m/s$$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}_{2s}} = (4*2)\mathbf{i} + (10 + 0.75*2^2)\mathbf{j} = 8\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$$

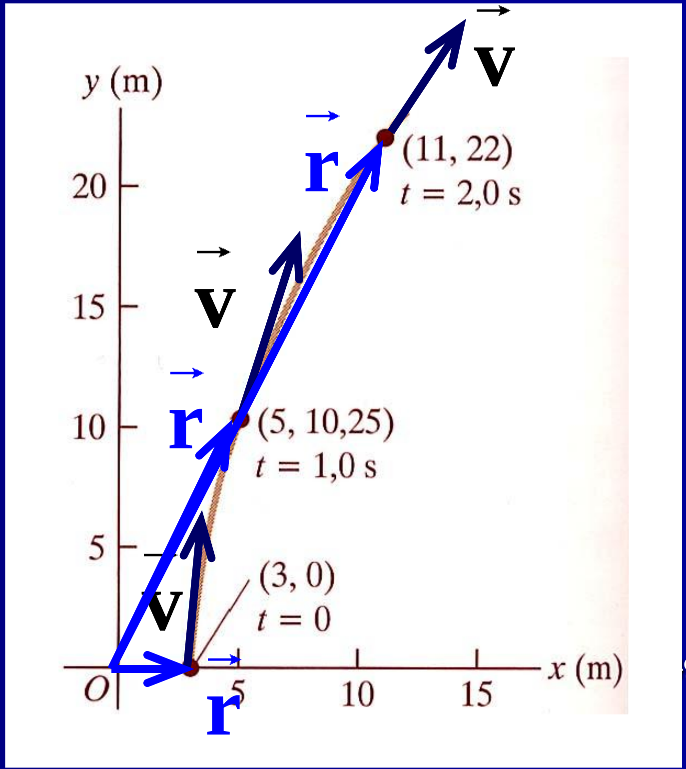
ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μετάθεση-Ταχύτητα στις 3 διαστάσεις



$$\vec{\mathbf{r}} = (3 + 2t^2)\mathbf{i} + (10t + 0.25t^3)\mathbf{j}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = (4t)\mathbf{i} + (10 + 0.75t^2)\mathbf{j}$$

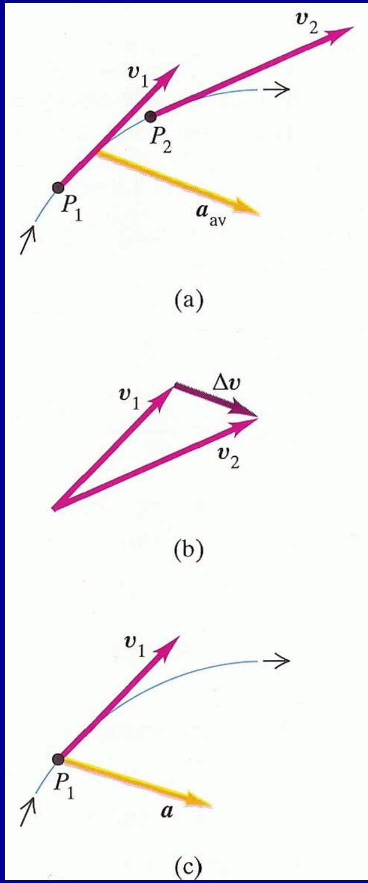


ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Επιτάχυνση στις 3 διαστάσεις

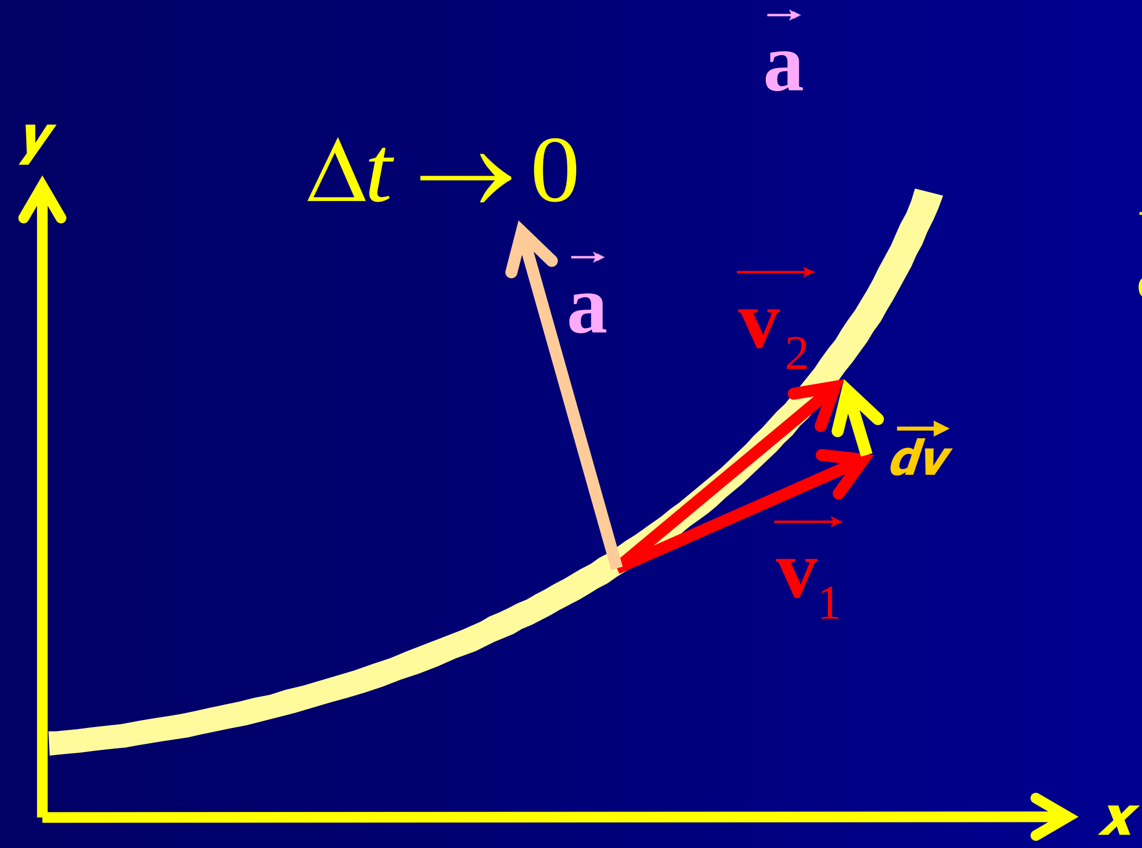
$$\overrightarrow{\mathbf{a}_{av}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{v}_2} - \overrightarrow{\mathbf{v}_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta\mathbf{v}}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{dv}}}{dt}$$



ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Επιτάχυνση στις 3 διαστάσεις



$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta \mathbf{v}}}{\Delta t}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{dv}}}{dt}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Επιτάχυνση στις 3 διαστάσεις

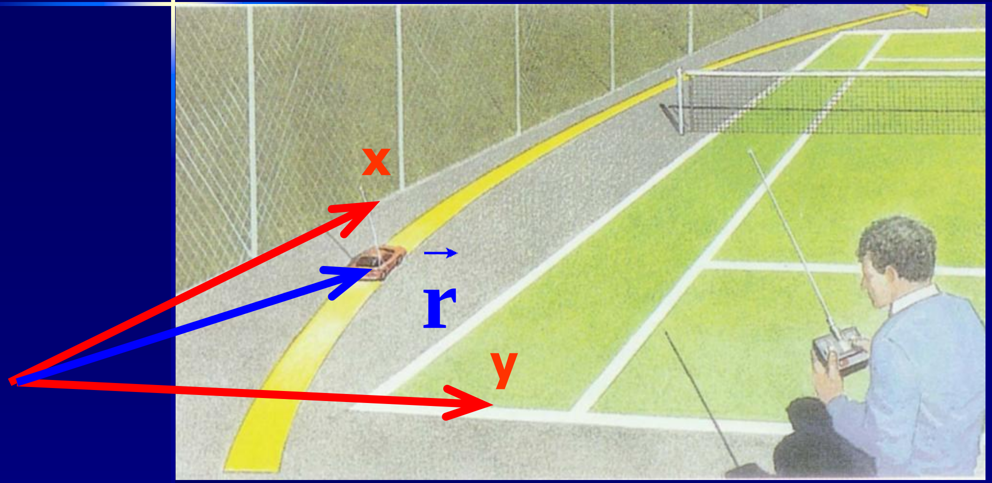
$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{dv}}}{dt} \qquad \vec{\mathbf{v}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{dr}}}{dt} \qquad \vec{\mathbf{a}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{d}^2\mathbf{r}}}{dt^2} \qquad \vec{\mathbf{r}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} \qquad \vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Επιτάχυνση στις 3 διαστάσεις



Παράδειγμα 3-2

x=3+2t²   y=10t+0.25t³

$$\vec{\mathbf{r}} = (3 + 2t^2)\mathbf{i} + (10t + 0.25t^3)\mathbf{j}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = (4t)\mathbf{i} + (10 + 0.75t^2)\mathbf{j}$$

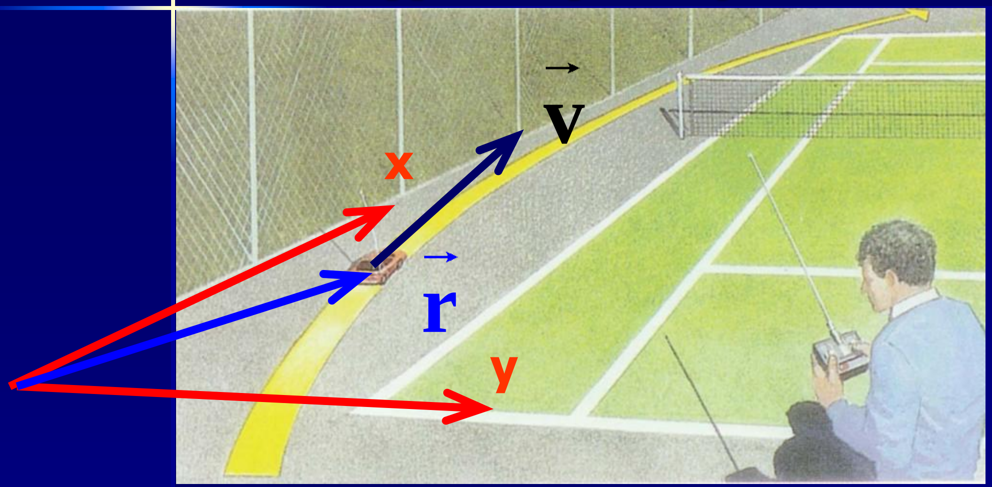
Ποια η στιγμιαία επιτάχυνση για t=2s;

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 1.5t\,\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}_{2s}} = (4m/s^2)\mathbf{i} + (3m/s^2)\,\mathbf{j} \qquad \left|\overrightarrow{\mathbf{a}_{2s}}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5m/s^2$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

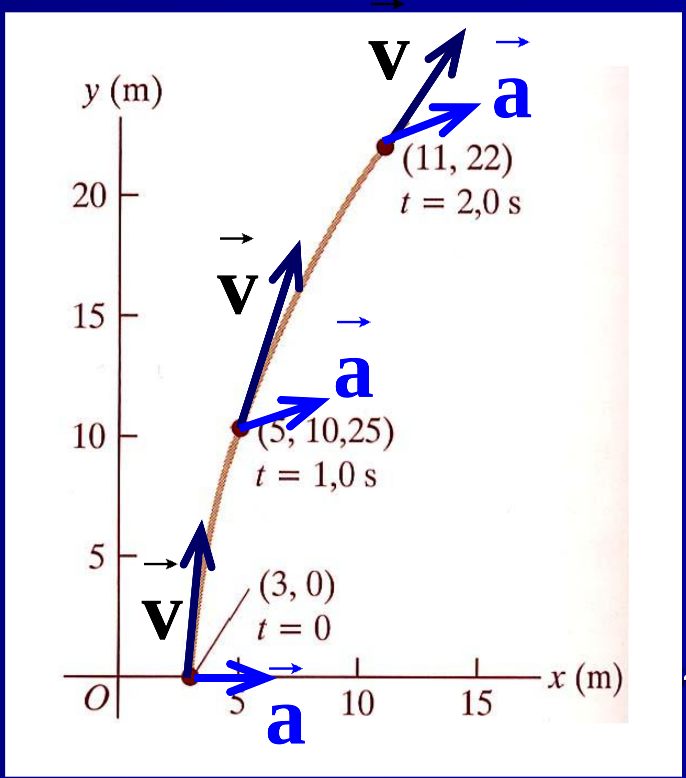
Επιτάχυνση στις 3 διαστάσεις



$$\vec{\mathbf{r}} = (3 + 2t^2)\,\mathbf{i} + (10t + 0.25t^3)\,\mathbf{j}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = (4t)\,\mathbf{i} + (10 + 0.75t^2)\,\mathbf{j}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = 4\,\mathbf{i} + 1.5t\,\mathbf{j}$$



ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

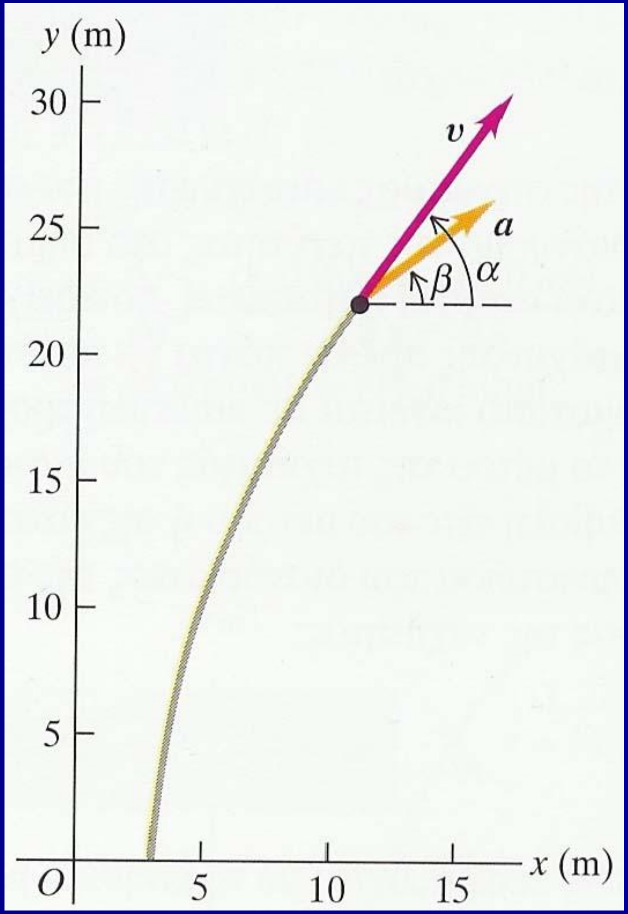
Επιτάχυνση στις 3 διαστάσεις

$$\overrightarrow{\mathbf{v}_{2s}} = (8m/s)\mathbf{i} + (13m/s)\mathbf{j}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{13}{8} \Rightarrow \alpha = 58^{o}$$

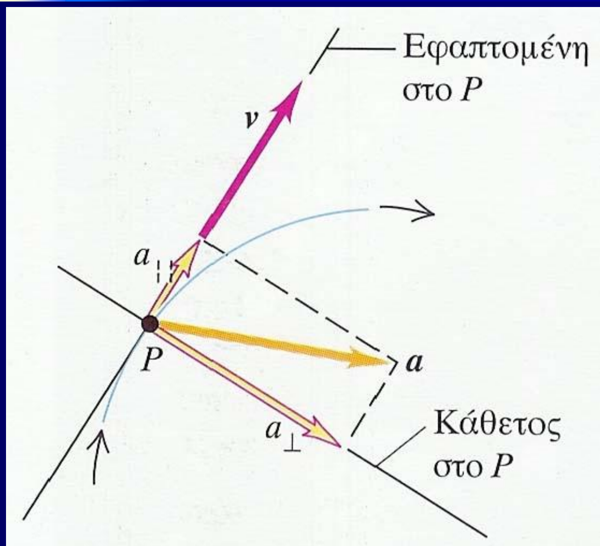
$$\overrightarrow{\mathbf{a}_{2s}} = (4m/s^2)\mathbf{i} + (3m/s^2)\mathbf{j}$$

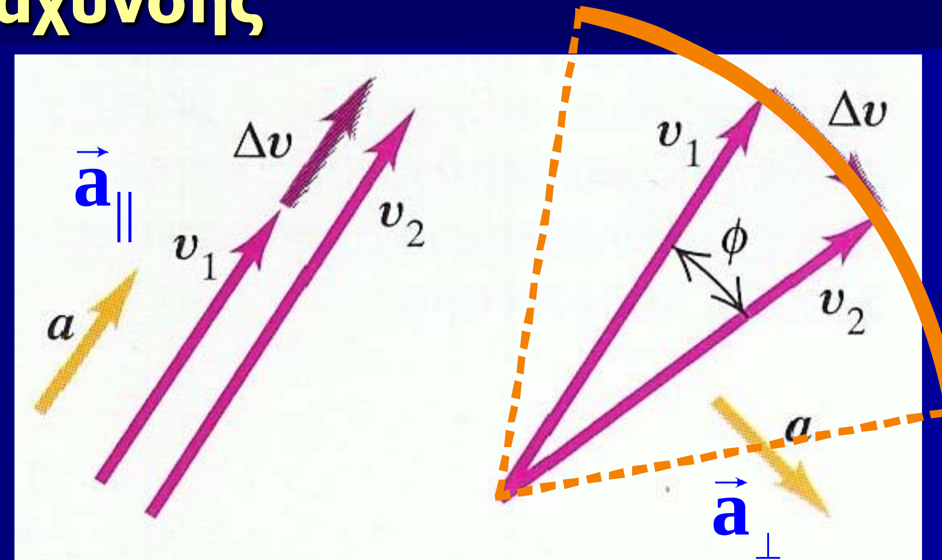
$$\tan(\beta) = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta = 37^{o}$$



ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Σχέση Ταχύτητας-Επιτάχυνσης





Η επιτάχυνση (κάθε χρονική στιγμή) αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη και μία κάθετη.

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{a}_{\parallel}} + \overrightarrow{\mathbf{a}_{\perp}}$$

Η παράλληλη επιτάχυνση αλλάζει <u>ΜΟΝΟ</u> το μέτρο της ταχύτητας

Η κάθετη επιτάχυνση αλλάζει <u>ΜΟΝΟ</u> τη διεύθυνση της ταχύτητας, δηλαδή:

$$\frac{d\left|\vec{\mathbf{v}}\right|}{dt} = 0 \quad \textit{ενώ} \quad \left|\vec{\mathbf{a}}\right| = \left|\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right| \neq 0$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

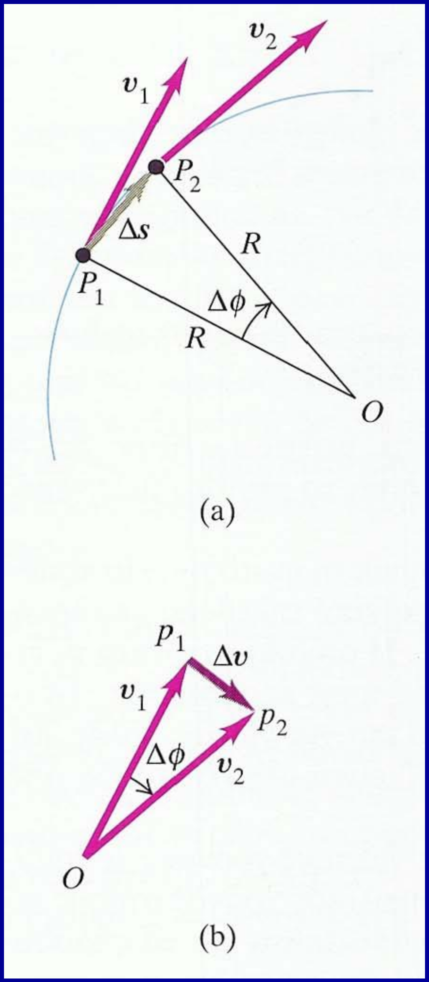
Ομαλή κυκλική κίνηση

Ομαλή Κυκλική κίνηση

Η κίνηση γίνεται πάνω σε ένα κύκλο…

Η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο…

$$\left|\vec{\mathbf{v}}_1\right| = \left|\vec{\mathbf{v}}_2\right| = v$$



Τρίγωνα Op_1p_2 και OP_1P_2 όμοια, άρα:

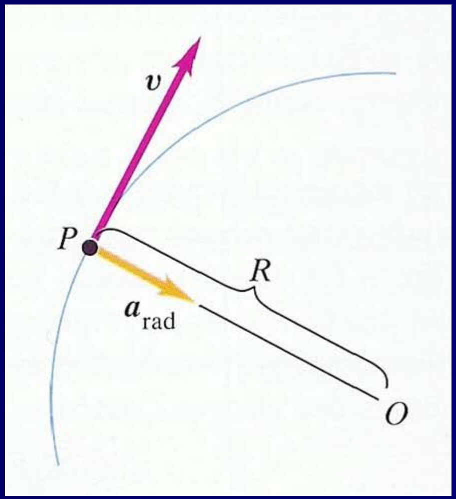
$$\frac{\left|\overrightarrow{\Delta \mathbf{v}}\right|}{\left|\vec{\mathbf{v}}_1\right|} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \left|\vec{\mathbf{a}}_{av}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{\Delta \mathbf{v}}\right|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

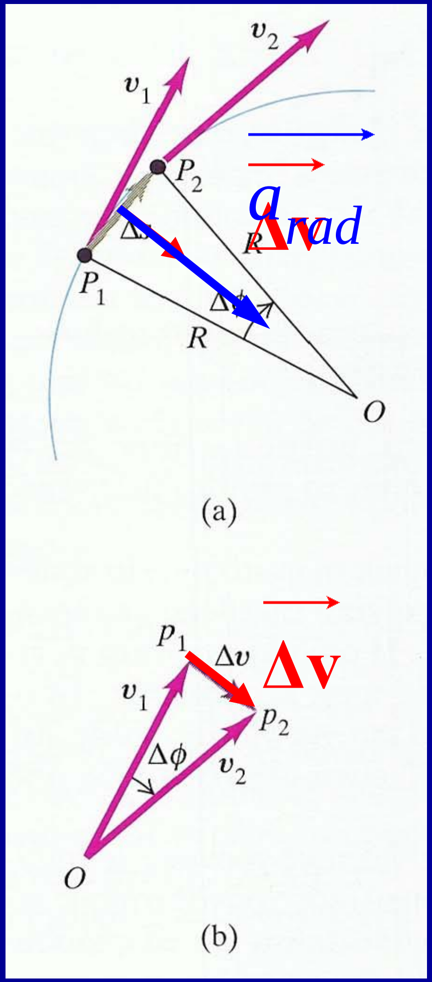
Ομαλή κυκλική κίνηση

$$\left|\vec{\mathbf{a}}_{av}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{\Delta \mathbf{v}}\right|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\left|\vec{\mathbf{a}}\right| = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R}v \Rightarrow a_{rad} = \frac{v^2}{R}$$

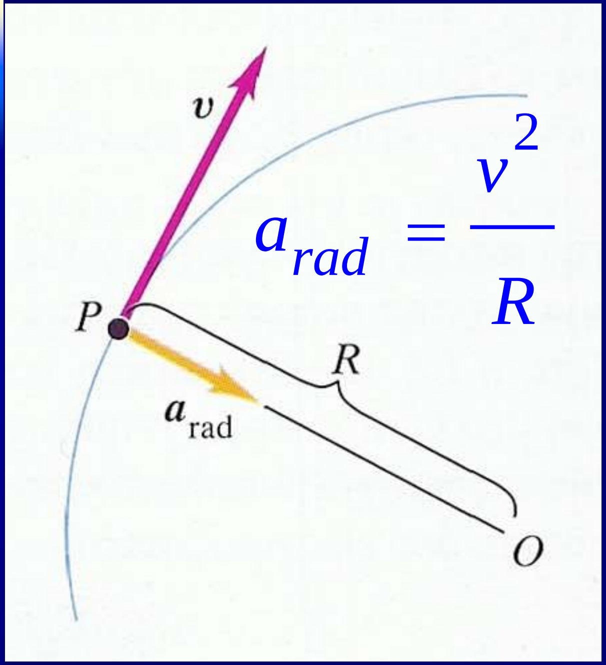


Κεντρομόλος Επιτάχυνση

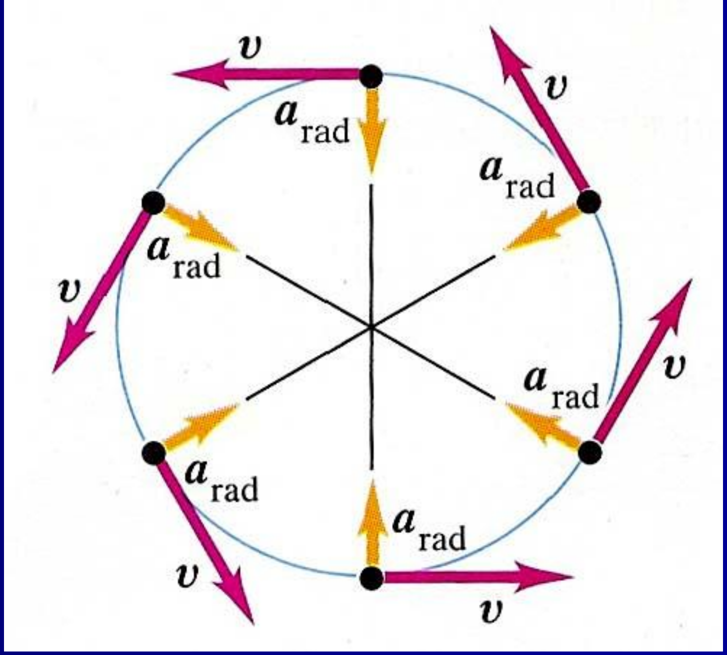


ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Ομαλή κυκλική κίνηση



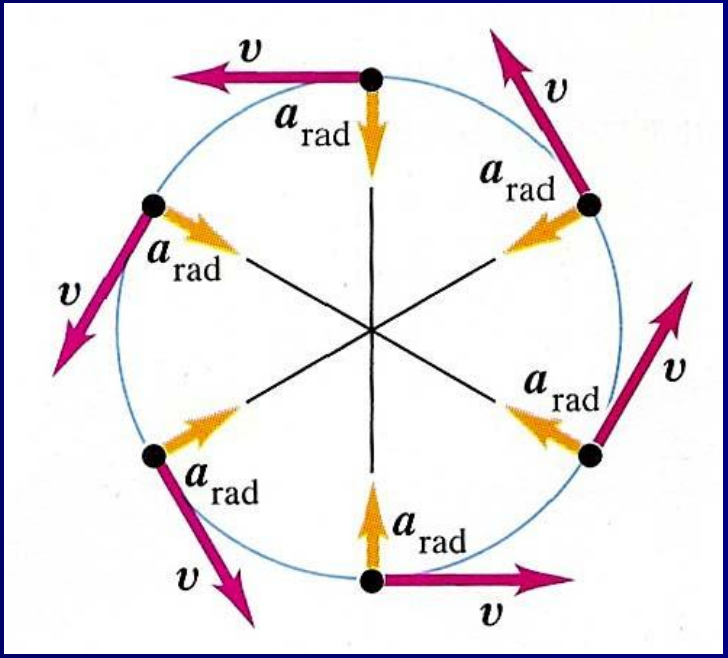
$$a_{rad} = \frac{v^2}{R}$$



$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad v = 2\pi f R \quad v = \omega R \quad a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2 f^2 R = \omega^2 R$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Ομαλή κυκλική κίνηση



Παράδειγμα 3-9
Σε ένα λούνα-παρκ, οι αναβάτες σε οριζόντιο τροχό ακτίνας 5m, κάνουν ένα γύρο σε 4s. Τι ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν;

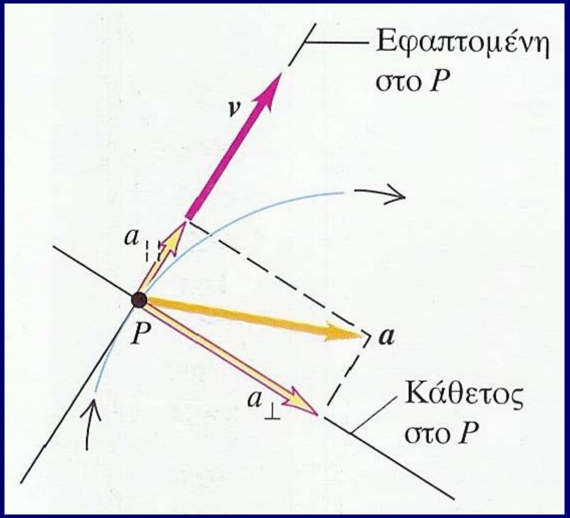
$$v = \frac{2\pi 5}{4} = 7,9 m/s$$

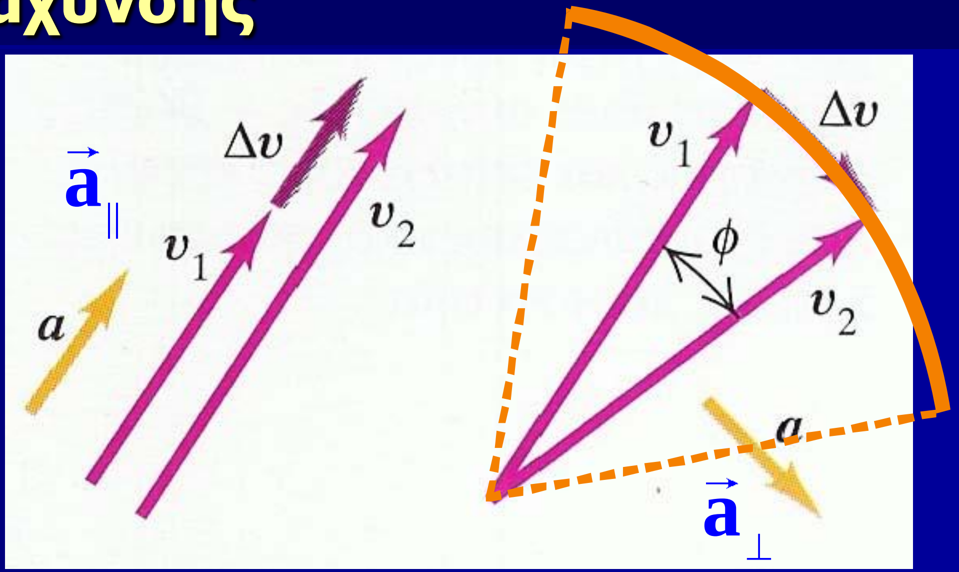
$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 5}{4^2} = 12 m/s^2 \simeq 1.2g$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ-ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Σχέση Ταχύτητας-Επιτάχυνσης





$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\parallel} + \vec{\mathbf{a}}_{\perp}$$

$$\left|\vec{\mathbf{a}}_{\perp}\right| = a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Η κάθετη (ακτινική) επιτάχυνση αλλάζει <u>ΜΟΝΟ</u> τη διεύθυνση της ταχύτητας

$$\left|\vec{\mathbf{a}}_{\parallel}\right| = a_{\tan} = \frac{d\left|\vec{\mathbf{v}}\right|}{dt}$$

Η παράλληλη (εφαπτομενική) επιτάχυνση αλλάζει <u>ΜΟΝΟ</u> το μέτρο της ταχύτητας

ΣΥΝΟΨΗ 2ου Μαθήματος

Μέση – Στιγμιαία Ταχύτητα-Επιτάχυνση σε 1 διάσταση

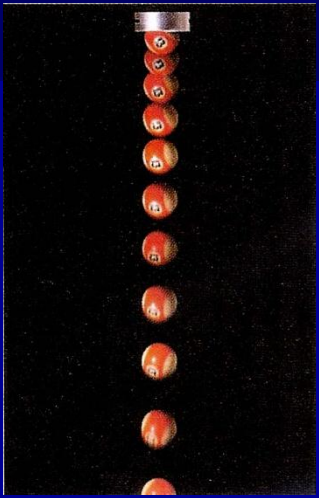
$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad v = \frac{dx}{dt} \qquad a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Κίνηση σε 1 διάσταση με σταθερή Επιτάχυνση – *Τι μορφή έχει;*

$$a = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t$$

ΣΥΝΟΨΗ 2ου Μαθήματος



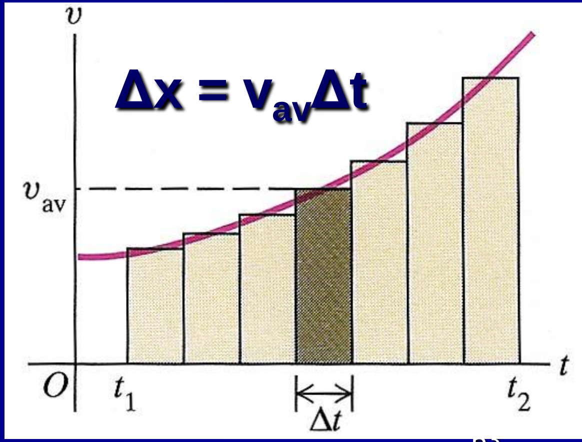
Κίνηση με σταθερή Επιτάχυνση –
Παράδειγμα: Κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο

$$a = g = 9.81 m/s^2 \qquad v = (\pm) v_0 + gt$$

$$x = (\pm) x_0 \, (\pm) v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

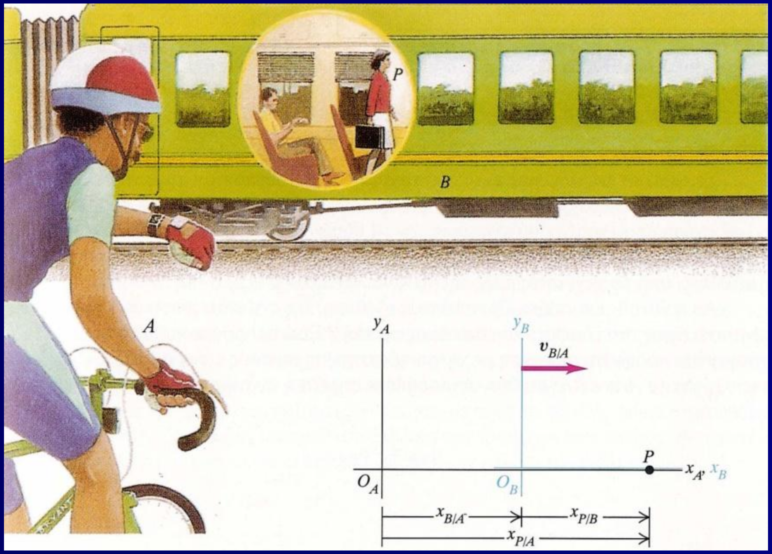
Μετάθεση και Ταχύτητα από ολοκλήρωση

$$x = x_0 + \int_0^t v\,dt \qquad v = v_0 + \int_0^t a\,dt$$



ΣΥΝΟΨΗ 2ου Μαθήματος

Σχετική Ταχύτητα – Σύστημα αναφοράς



$$\mathbf{x}_{P/A} = \mathbf{x}_{P/B} + \mathbf{x}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_{P/A} = \mathbf{v}_{P/B} + \mathbf{v}_{B/A}$$

ΣΥΝΟΨΗ 2ου Μαθήματος

Μετάθεση – Ταχύτητα - Επιτάχυνση στις 3 διαστάσεις

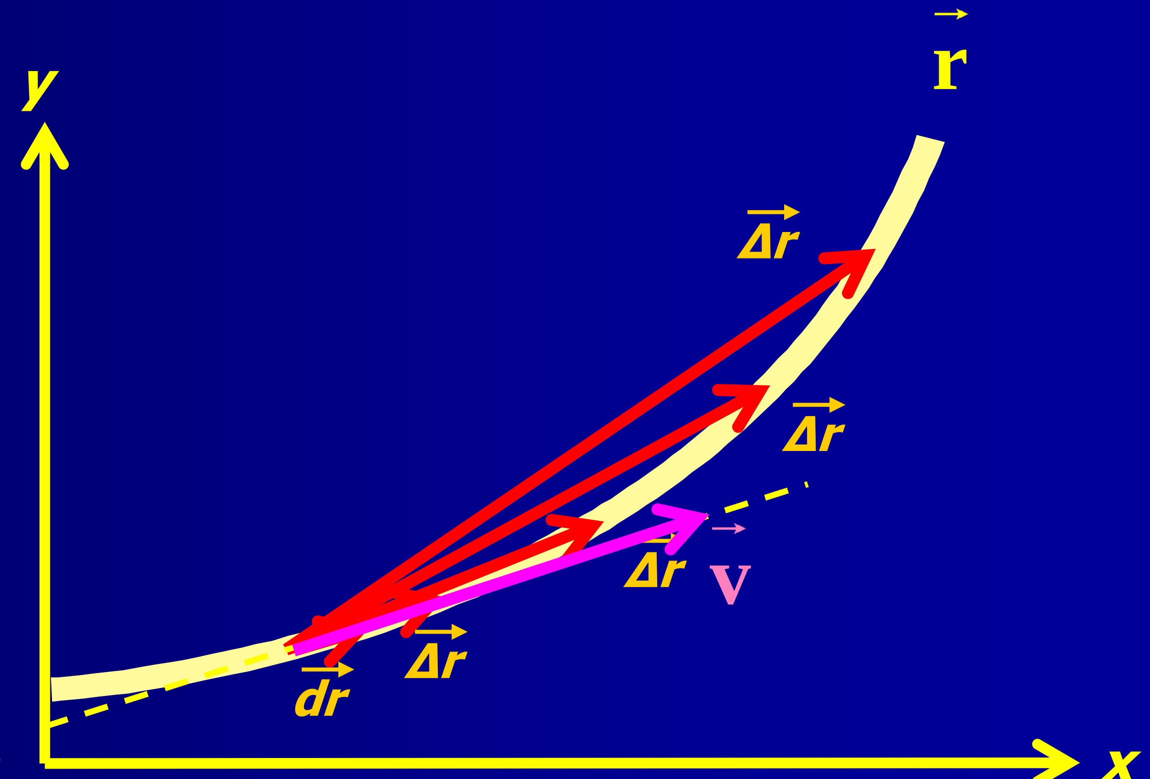
Διάνυσμα θέσης

$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\vec{\mathbf{r}} \qquad (x, y, z)$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

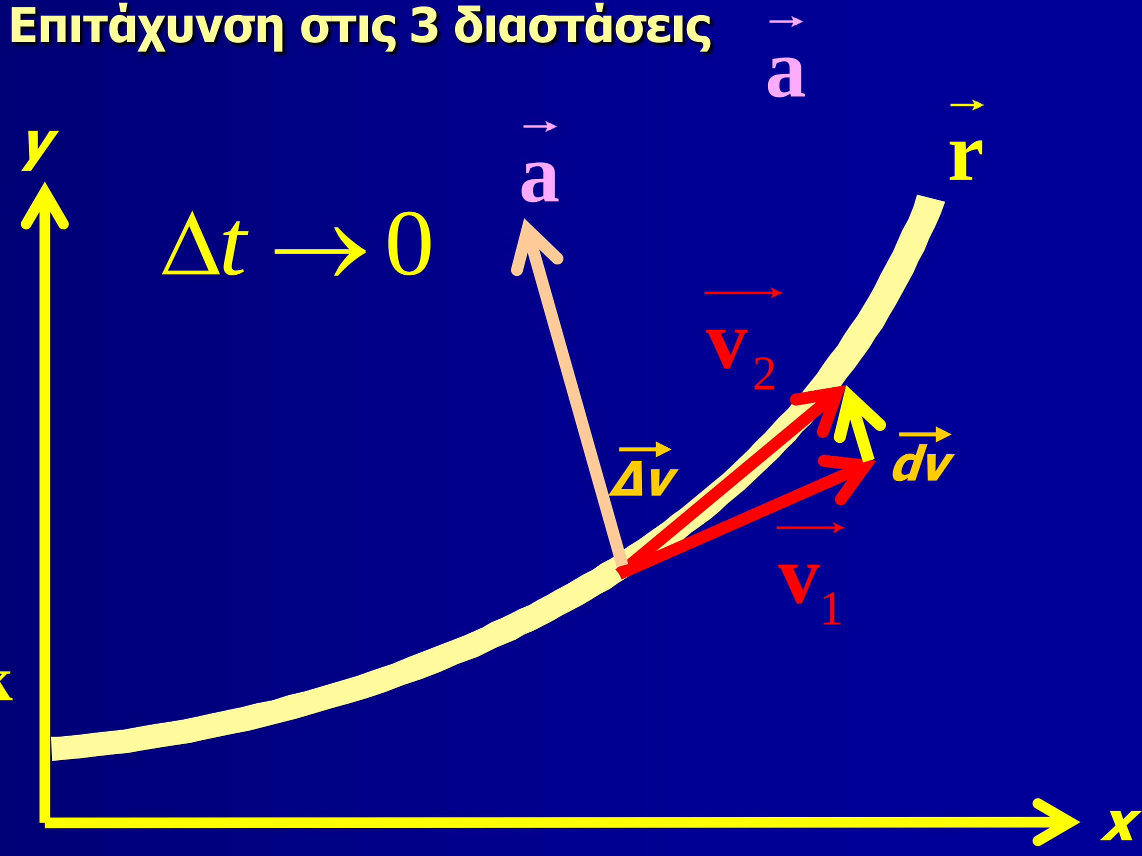


ΣΥΝΟΨΗ 2ου Μαθήματος

Μετάθεση – Ταχύτητα - Επιτάχυνση στις 3 διαστάσεις

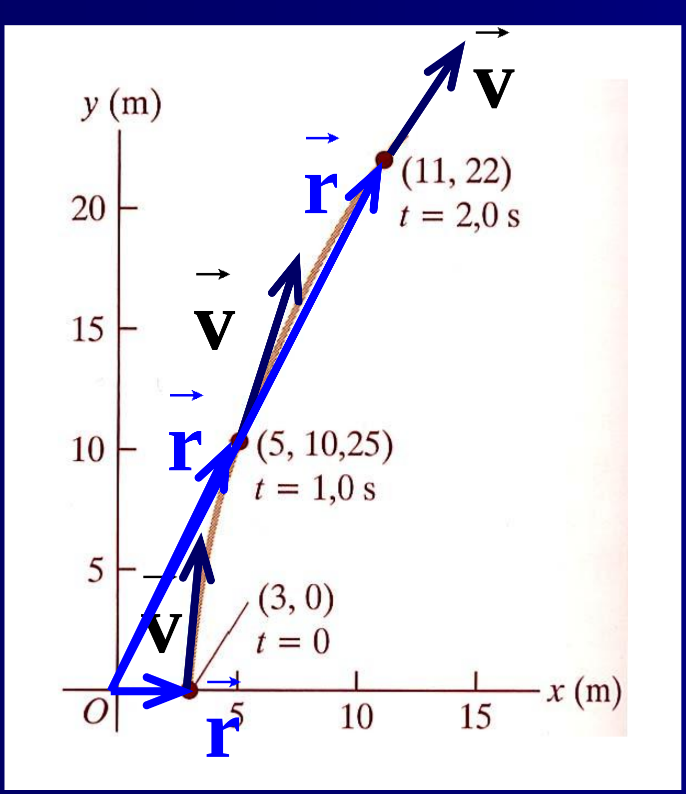
$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

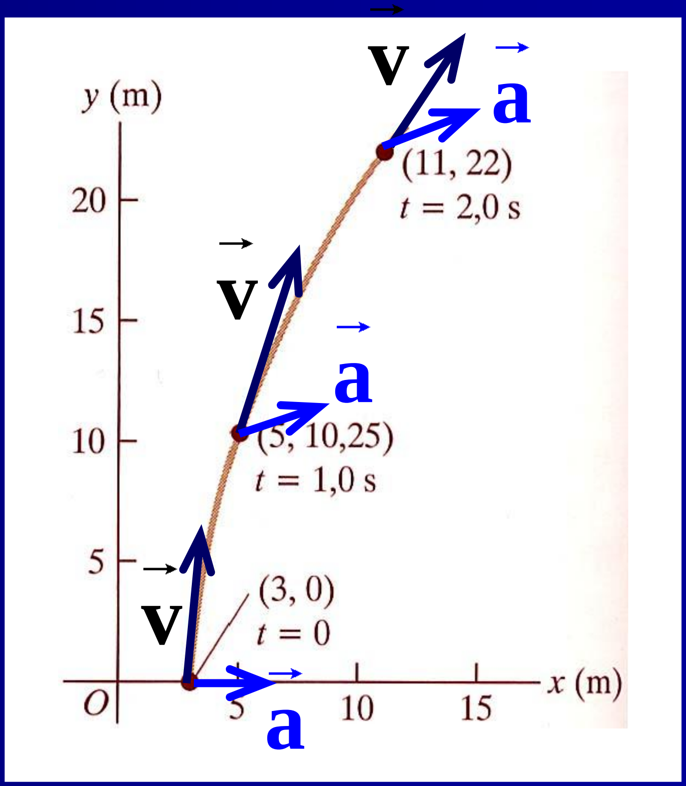
$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2 x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2}\mathbf{k}$$



ΣΥΝΟΨΗ 2ου Μαθήματος

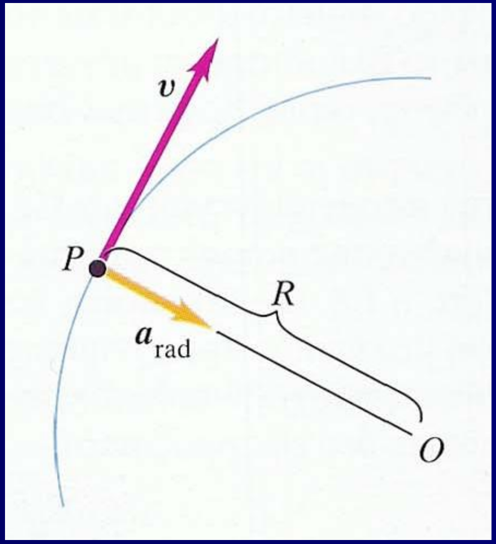
Μετάθεση – Ταχύτητα - Επιτάχυνση στις 3 διαστάσεις

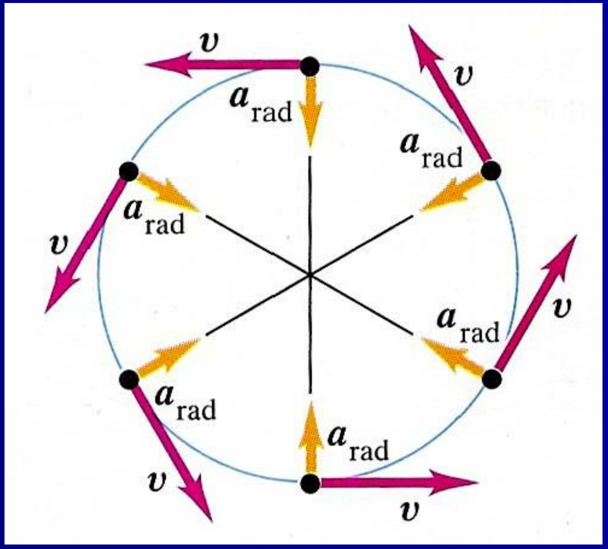




ΣΥΝΟΨΗ 2ου Μαθήματος

Ομαλή κυκλική κίνηση

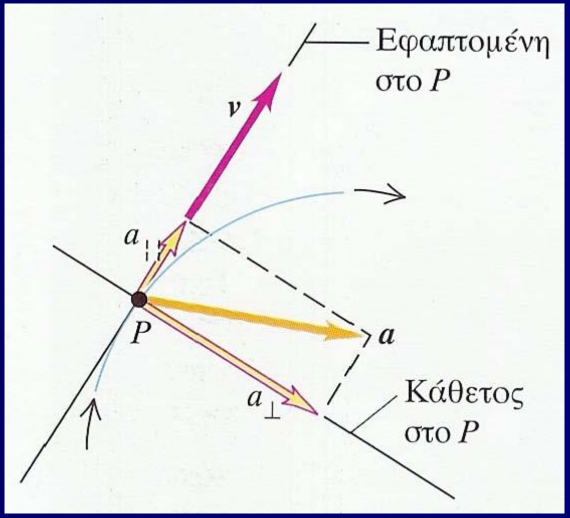


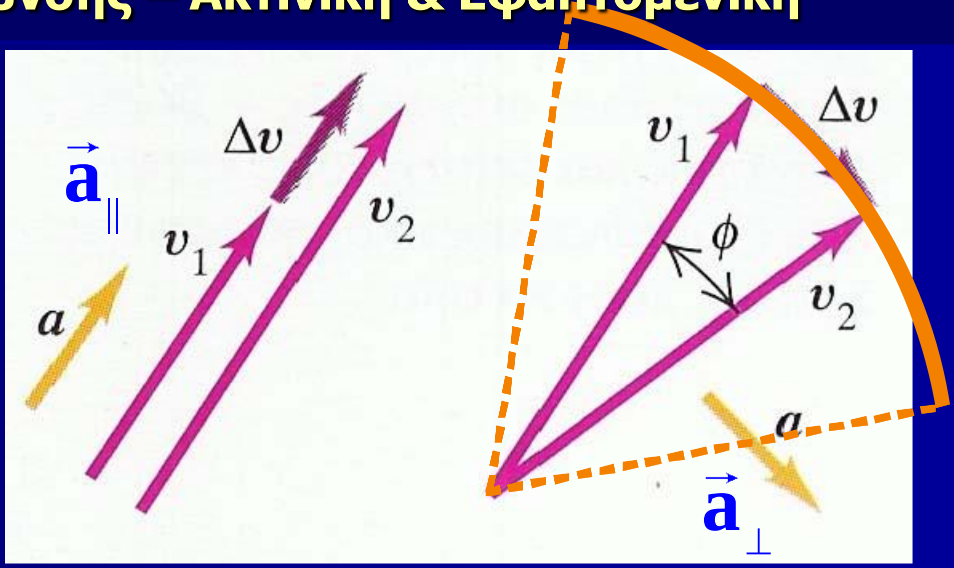


$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad v = 2\pi f R \quad v = \omega R \quad a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2 f^2 R = \omega^2 R$$

ΣΥΝΟΨΗ 2ου Μαθήματος

Οι δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης – Ακτινική & Εφαπτομενική





$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\parallel} + \vec{\mathbf{a}}_{\perp}$$

$$\left|\vec{\mathbf{a}}_{\parallel}\right| = a_{tan} = \frac{d\left|\vec{\mathbf{v}}\right|}{dt}$$

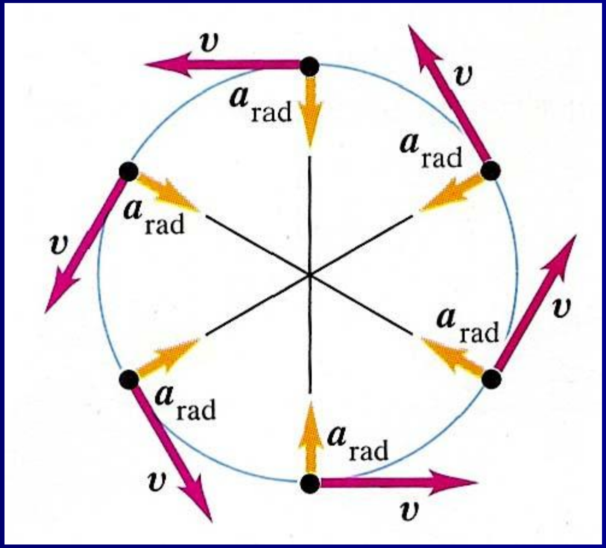
Η παράλληλη (εφαπτομενική) επιτάχυνση αλλάζει <u>ΜΟΝΟ</u> το μέτρο της ταχύτητας

$$\left|\vec{\mathbf{a}}_{\perp}\right| = a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \omega^2 R$$

Η κάθετη (ακτινική) επιτάχυνση αλλάζει <u>ΜΟΝΟ</u> τη διεύθυνση της ταχύτητας

Προτεινόμενες Ασκήσεις 2ου Μαθήματος

Η Γή έχει μέση ακτίνα περιστροφής 1.49*10¹¹m. Αν θεωρήσουμε ότι η τροχιά είναι κυκλική, πόση είναι η ταχύτητα περιστροφής και πόση είναι η ακτινική επιτάχυνση σε σχέση με τον Ήλιο.



Προτεινόμενες Ασκήσεις 2ου Μαθήματος

Άσκηση 3-33

Ένα πουλί πετάει στο επίπεδο xy με διάνυσμα ταχύτητας:

$$\vec{v} = (a - bt^2)\, i + ct\, j$$

όπου $a=2.1 m/s$, $b=3.6 m/s^3$ και $c=5 m/s^2$ και η θετική κατεύθυνση του άξονα y είναι κατακόρυφα προς τα πάνω. Αν το πουλί είναι στην αρχή των αξόνων για $t=0$ να βρεθούν τα διανύσματα θέσης και επιτάχυνσης σαν συνάρτηση του χρόνου