Μάθημα 2ο

Στοιχεία Θεωρίας Ελαστικότητας

- Τανυστής Τάσης
- Τανυστής Ανηγμένης Παραμόρφωσης
- Σχέση Τάσης και Ανηγμένης Παραμόρφωσης
- Ελαστικές Σταθερές

Εισαγωγή

Για την ποσοτική περιγραφή της διάδοσης των σεισμικών κυμάτων στο εσωτερικό της Γης απαιτείται η γνώση των δυνάμεων που ασκούνται και των παραμορφώσεων που προκαλούνται στο υλικό της Γης από τις δυνάμεις αυτές.

Οι <u>δυνάμεις</u> που ασκούνται μεταξύ των διαφόρων τμημάτων ενός τρισδιάστατου μέσου, όπως είναι η Γη, ορίζονται από την **τάση (stress).**

Οι <u>παραμορφώσεις</u> ορίζονται από την **ανηγμένη παραμόρφωση (strain).**

Η τάση και η παραμόρφωση συνδέονται μέσω σχέσεων <u>οι οποίες καθορίζονται από τη φύση του υλικού μέσου.</u>

Υποθέσεις για τη φύση του υλικού μέσου και το μέγεθος των παραμορφώσεων:

- Συνέχεια του μέσου.
- Ελαστικότητα του μέσου.
- Απειροστές παραμορφώσεις του υλικού μέσου κατά τη διάδοση των σεισμικών κυμάτων.

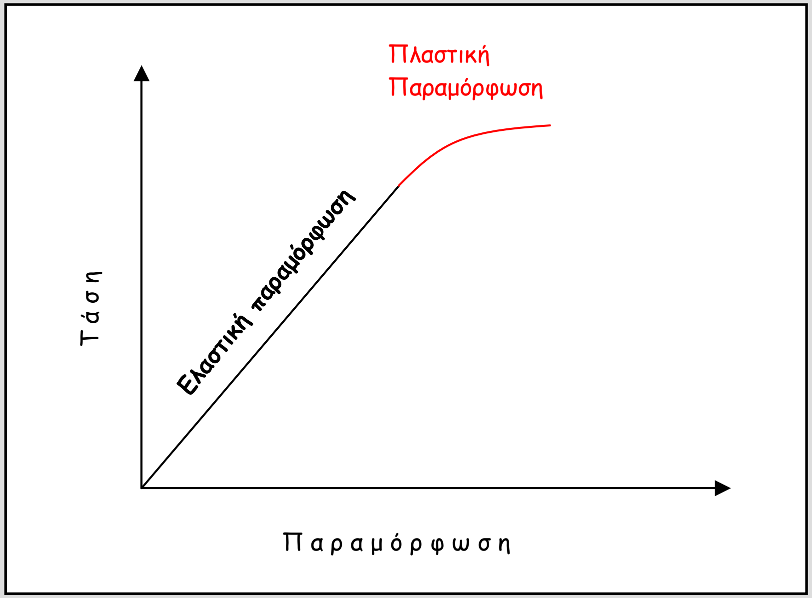
Εισαγωγή *(συνέχεια)*

Σ υ ν ε χ έ ς μ έ σ ο: ορίζουμε ένα εξιδανικευμένο υλικό μέσο του οποίου οι ιδιότητες επιτρέπουν την εφαρμογή των νόμων της Μηχανικής.

Η απόσταση μεταξύ των γειτονικών σημείων θεωρείται απειροστά μικρή, έτσι ώστε η πυκνότητα, η τάση και η ανηγμένη παραμόρφωση να είναι **συνεχείς συναρτήσεις** του χρόνου και των συντεταγμένων του χώρου.

Στο συνεχές μέσο, η κοκκώδης δομή του υλικού της Γης και η μοριακή και ατομική φύση του δε λαμβάνονται υπόψη.

Ελαστικό μέσο: το μέσο που επανέρχεται στην αρχική του θέση μετά τη λήξη της δράσης του αιτίου παραμόρφωσής του.



Κατά την ελαστική παραμόρφωση η παραμόρφωση είναι γραμμική συνάρτηση της τάσης.

Η γραμμική αυτή σχέση παύει να ισχύει κατά την πλαστική παραμόρφωση

Κατά τη διάδοση των ελαστικών κυμάτων στη Γη θεωρούμε ότι τα πετρώματά της συμπεριφέρονται ως ελαστικό μέσο. Θεωρούμε, επίσης, ότι οι εδαφικές σεισμικές κινήσεις είναι μικρού πλάτους και μικρής διάρκειας. Αυτές οι υποθέσεις επιτρέπουν την εφαρμογή της θεωρίας της **ελαστικότητας** και της θεωρίας της **απειροστής παραμόρφωσης**.

Εκτός από τη γειτονιά της σεισμικής πηγής όπου οι παραμορφώσεις είναι σημαντικές (>10-4) και ορισμένες από αυτές μόνιμες (διάρρηξη στο ρήγμα, κλπ.), σε μεγαλύτερες αποστάσεις οι παραμορφώσεις των πετρωμάτων κατά τη διάδοση των σεισμικών κυμάτων είναι μικρές (~10-9) και παροδικές.

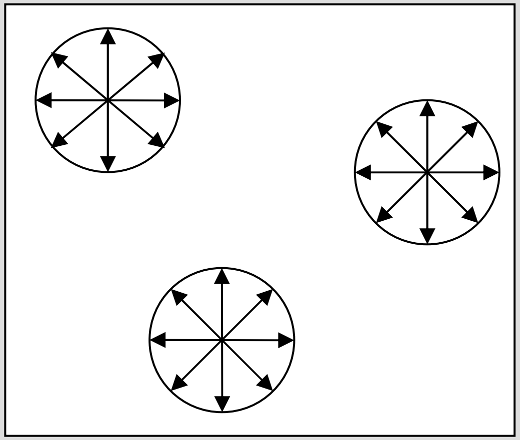
Εισαγωγή *(συνέχεια)*

Για τη μελέτη της διάδοσης των ελαστικών κυμάτων στο εσωτερικό της Γης δεχόμαστε επίσης ότι το υλικό είναι:

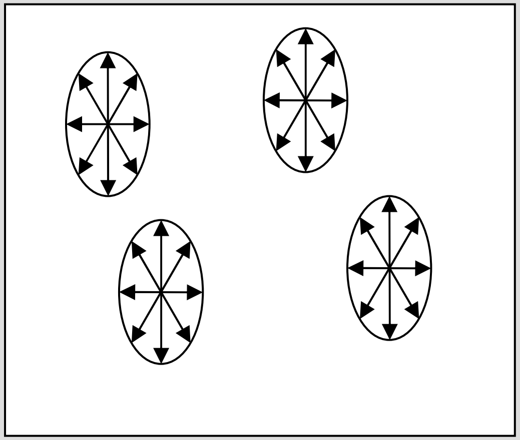
- **α) ισότροπο**, δηλαδή δε μεταβάλλονται οι ιδιότητές του προς τις διάφορες διευθύνσεις

- **β) ομογενές** ως προς ορισμένη ιδιότητα (π.χ. πυκνότητα), δηλαδή η ιδιότητα αυτή είναι σταθερή σ' όλο το χώρο του τμήματος.

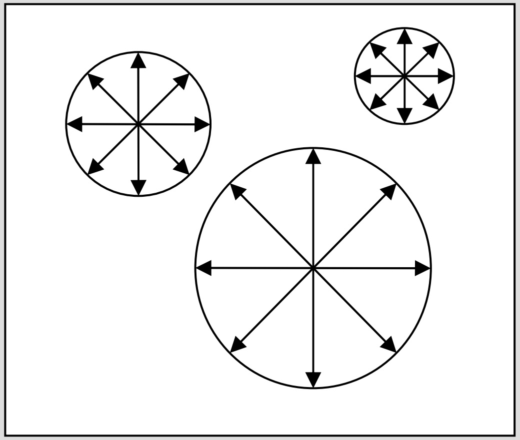
Εισαγωγή *(συνέχεια)*



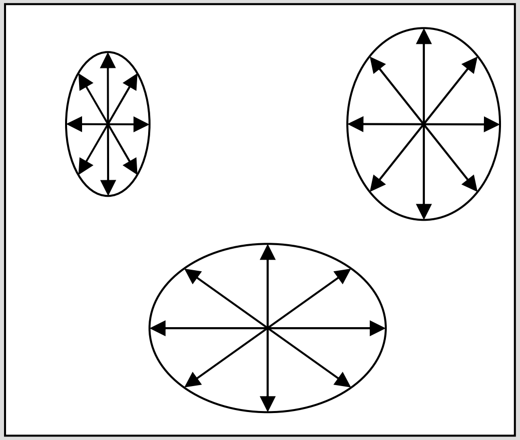
Ισότροπο
και
Ομογενές



Ανισότροπο
και
Ομογενές



Ισότροπο
και
Ανομογενές



Ανισότροπο
και
Ανομογενές

2. Τάση σε Σημείο Σώματος

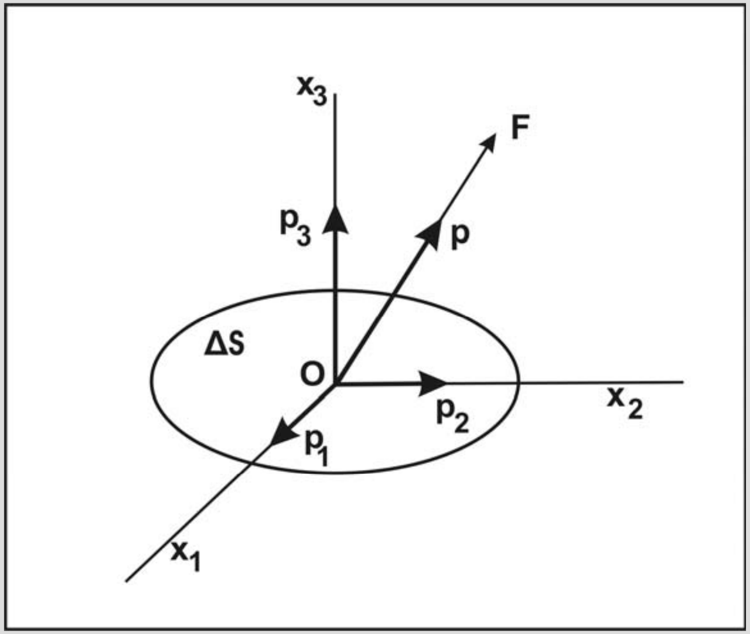
Ας θεωρήσουμε φυσικό στερεό σώμα το οποίο παραμορφώνεται λόγω της επίδρασης εξωτερικών δυνάμεων που βρίσκονται σε ισορροπία. Τότε, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε τυχόν σημείο, Ο, του σώματος αυτού είναι ίση με μηδέν. Όμως το υλικό του σώματος πολύ κοντά στο σημείο αυτό βρίσκεται σε εντατική κατάσταση (**παραμορφώνεται**).

Ας θεωρήσουμε στοιχειώδη επιφάνεια, ΔS, που περνάει από το σημείο Ο του σώματος. Κάθε ένα από τα δύο τμήματα του σώματος που έχουν ως κοινή οριακή επιφάνεια την ΔS ασκεί στο άλλο, μέσα από την επιφάνεια αυτή, μία συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$. Οι δύο αυτές δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες, λόγω της αρχής της δράσης και αντίδρασης και για το λόγο αυτό αρκεί να μελετήσουμε τη μία από τις δύο αυτές δυνάμεις. Η δύναμη αυτή, $\vec{F}$, εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας ΔS και από το εμβαδόν της.

2. Τάση σε Σημείο Σώματος *(συνέχεια)*

Ονομάζουμε **διάνυσμα τάσης** στο σημείο Ο σε σχέση με την επιφάνεια *ΔS* (σχ. 2.1) τη διανυσματική ποσότητα, $\vec{p}$, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{p} = \frac{\vec{F}}{\Delta S}, \quad \Delta \mathrm{S} \to 0$$



Σχ. 2.1. Ορισμός του διανύσματος τάσης.

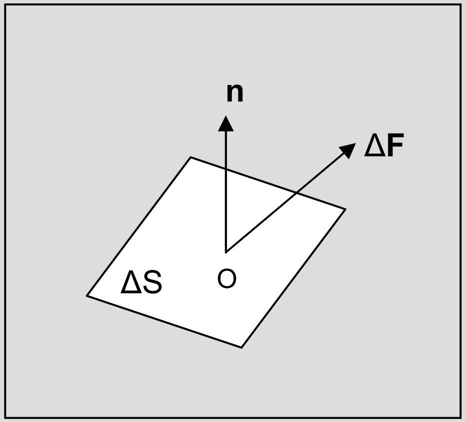
Το διάνυσμα τάσης αναλύεται σε τρεις συνιστώσες p_1, p_2, p_3 κατά μήκος των τριών αξόνων (x_1, x_2, x_3) που τέμνονται στο σημείο Ο και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Έστω ότι ο άξονας x_3 είναι κάθετος στην επιφάνεια, επομένως οι άλλοι δύο θα βρίσκονται πάνω σ' αυτή.

Η συνιστώσα, p_3, που είναι κάθετη στην επιφάνεια λέγεται **κάθετη συνιστώσα τάσης**

Οι συνιστώσες p_1 και p_2 που βρίσκονται πάνω (εφάπτονται) στην επιφάνεια, λέγονται **διατμητικές συνιστώσες τάσης**.

2. Τάση σε Σημείο Σώματος *(συνέχεια)*



Γεωμετρία για τον ορισμό του διανύσματος της τάσης με διαφορετικούς συμβολισμούς.

n: Μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια ΔS.

ΔF: Δύναμη που εξασκείται από το ένα μέσο στο άλλο.

Το <u>διάνυσμα τάσης</u>, ***T(n)*** ή <u>Traction</u> ορίζεται από τη σχέση:

$$T(n) = \lim_{\Delta S \to 0} \Delta F / \Delta S = dF/dS$$

Η ποσότητα ***T(n)*** εξαρτάται από το ***n*** (τη διεύθυνση της επιφάνειας ***ΔS*** και ισχύει ότι ***T(-n) = - T(n)***

Η προβολή (συνιστώσα) του ***T*** στο ***n*** είναι ***T. n*** (εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων).

<u>Επομένως το διάνυσμα τάσης δεν περιγράφει πλήρως τις συνθήκες τάσης σ' ορισμένο σημείο, Ο, φυσικού σώματος γιατί, όταν μεταβληθεί ο προσανατολισμός της επιφάνειας, ***ΔS***, θα μεταβληθεί και το διάνυσμα τάσης.</u>

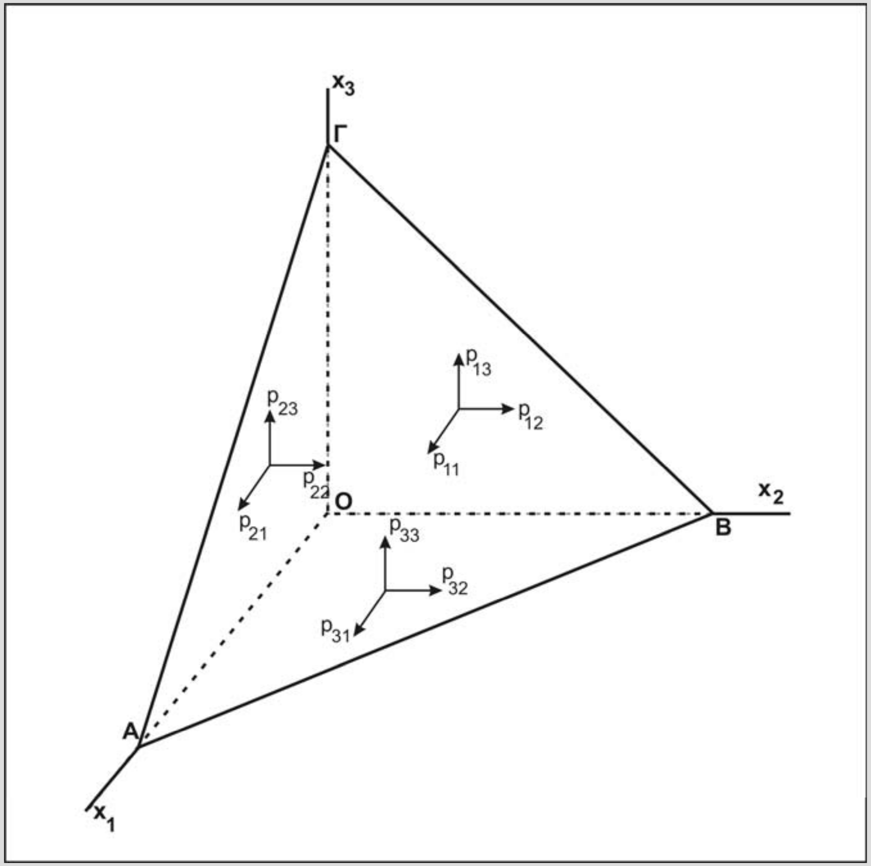
2.1. Τανυστής Τάσης

Για να καθοριστεί πλήρως η τάση στο σημείο Ο πρέπει να καθοριστούν τα διανύσματα τάσης σε σχέση με **κάθε επίπεδο** που περνάει από το σημείο αυτό.

Προκύπτει, όμως, ότι είναι αρκετό να καθοριστούν τα διανύσματα τάσης σε σχέση με τρία επίπεδα που περνάν από το *Ο* και είναι κάθετα μεταξύ τους.

Επομένως, η τάση σε τυχόν σημείο Ο του σώματος **ορίζεται από τρία διανύσματα τάσης** δηλαδή από **εννέα συνιστώσες** τάσης.

Η οριζόμενη έτσι τάση αποτελεί τανυστή δεύτερης τάξης.



Σχ. 2.2. Οι εννέα συνιστώσες τάσης.

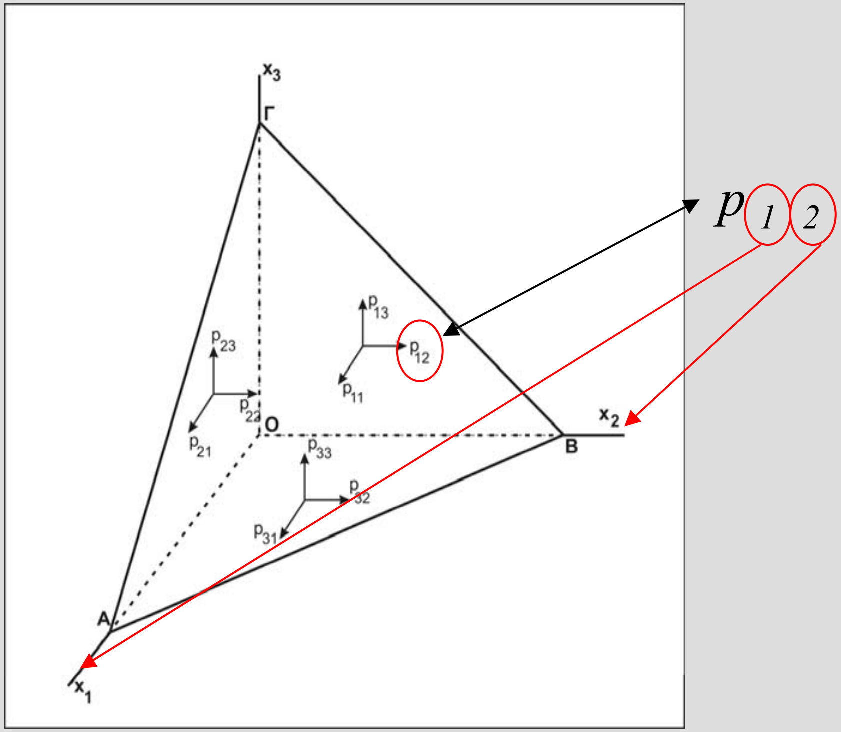
Ας θεωρήσουμε τρία επίπεδα που περνάν από το σημείο Ο και τέμνονται κατά τους άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 (σχ. 2.2).

Αν πάνω στους άξονες λάβουμε τμήματα δx_1=ΟΑ, δx_2=ΟΒ και δx_3=ΟΓ, ορίζεται ένα μικρό τετράεδρο ΟΑΒΓ που βρίσκεται σε στατική ισορροπία υπό την επίδραση των δυνάμεων και ροπών που ασκούνται από την ύλη που το περιβάλλει. Όταν $\delta x_1 \rightarrow 0$, $\delta x_2 \rightarrow 0$, $\delta x_3 \rightarrow 0$, δηλαδή, όταν ο όγκος του τετραέδρου τείνει στο μηδέν, τα όρια των εννέα λόγων των συνιστωσών των τριών δυνάμεων που ασκούνται στις έδρες του τετραέδρου δια των αντιστοίχων εμβαδών των εδρών αποτελούν τις συνιστώσες τάσης στο σημείο Ο. Οι εννέα συνιστώσες τάσης παριστάνονται με το σύμβολο p_{ij}, $i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$, δηλαδή, η τάση παριστάνεται με τον πίνακα:

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Ο πρώτος δείκτης, i : **παριστάνει τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο πάνω στο οποίο ασκείται η τάση.**

Ο δεύτερος δείκτης, j : **τον άξονα προς τον οποίο η συνιστώσα τάσης είναι παράλληλη.**



Π.χ. η συνιστώσα τάσης p_{12} ασκείται στο επίπεδο στο οποίο είναι κάθετος ο άξονας x_1 (επομένως στο επίπεδο ΟΒΓ) και είναι παράλληλη προς τον άξονα x_2.

Επομένως:

p_{11}, p_{22}, p_{33} είναι οι <u>κάθετες συνιστώσες</u> τάσης.

p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, p_{32} είναι οι <u>διατμητικές συνιστώσες</u> τάσης.

Τάση συμπίεσης: κάθετη συνιστώσα τάσης με φορά προς το εσωτερικό μέρος
Τάση εφελκυσμού: κάθετη συνιστώσα τάσης με φορά προς το εξωτερικό μέρος

Η τάση συμπίεσης τείνει να ελαττώσει τον όγκο του σώματος **(θεωρείται θετική)**,

Η τάση εφελκυσμού τείνει να τον αυξήσει **(θεωρείται αρνητική)**.

Θεωρούμε **θετικές** τις συνιστώσες τάσεις με φορά προς το $+x_i$ που εφαρμόζονται σε επιφάνειες με μοναδιαία διανύσματα επίσης προς το $+x_i$ ή με φορά προς το $-x_i$ που εφαρμόζονται σε επιφάνειες με μοναδιαία διανύσματα επίσης προς το $-x_i$.

2.2. Συνθήκες Ισορροπίας

Για να βρίσκεται το στοιχειώδες τετράεδρο του σχήματος (2.2) σε ισορροπία, πρέπει να ισχύουν οι εξής συνθήκες:

1. **Κάθε μια από τις τρεις συνισταμένες δυνάμεις που ασκούνται στο τετράεδρο παράλληλα προς τους τρεις αντίστοιχους άξονες (x_1, x_2, x_3) να είναι ίση με μηδέν.**

   Με βάση τη συνθήκη αυτή μπορούμε να εκφράσουμε τις τρεις συνιστώσες τάσης, παράλληλα προς τους άξονες, οι οποίες ασκούνται σε οποιοδήποτε επίπεδο σε συνάρτηση με τις συνιστώσες τάσης που ασκούνται στις τρεις έδρες του τετραέδρου (Σχ. 2.2).

2. **Κάθε μια από τις τρεις συνισταμένες ροπές ως προς τους τρεις άξονες είναι επίσης ίση με μηδέν.**

   Με βάση τη συνθήκη αυτή αποδεικνύεται ότι η τάση είναι συμμετρικός τανυστής

$$p_{ij}=p_{ji} \quad i, j=1,2,3$$

2.2. Συνθήκες Ισορροπίας *(συνέχεια)*

Πρώτη συνθήκη ισοροπίας

Αν ξέρουμε τις εννέα συνιστώσες τάσης ως προς τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα (Σχ. 2.2) τότε ο τανυστής τάσης έχει ορισθεί πλήρως

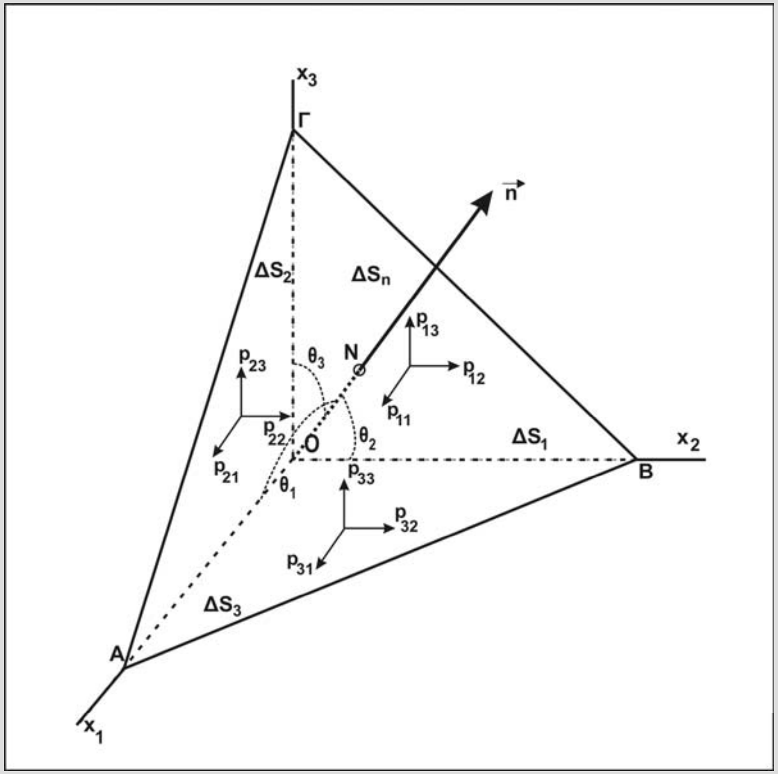
ΔΗΛΑΔΗ

<u>μπορούμε να υπολογίσουμε τις τρεις συνιστώσες τάσης σε οποιαδήποτε άλλη επιφάνεια S.</u>

Η τάση, τ, που ασκείται σε μια επιφάνεια, S, με τυχαίο προσανατολισμό, δίνεται από από τη σχέση:

$$\boxed{\tau_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ji} n_j \qquad i = 1,2,3}$$

όπου τ_i ($i=1,2,3$) οι συνιστώσες του διανύσματος τάσης παράλληλα προς τους άξονες x_1, x_2, x_3, αντίστοιχα και n_j ($j=1,2,3$) οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος που είναι κάθετο στην επιφάνεια S.



Θεωρούμε τα επίπεδα ΔS_1=ΟΒΓ, ΔS_2=ΟΓΑ, ΔS_3=ΟΑΒ, ΔS_n=ΑΒΓ.

Στο επίπεδο ΔS_n και παράλληλα προς τους άξονες x_1, x_2, x_3 ασκούνται οι τάσεις τ_1, τ_2 και τ_3.

θ_1, θ_2, θ_3 είναι οι γωνίες που σχηματίζει η ΟΝ με τους άξονες x_1, x_2, x_3. Επομένως

$\Delta S_i = \Delta S_n \sigma\upsilon\nu\theta_i$ και

$$\vec{n} = n_1\hat{x}_1 + n_2\hat{x}_2 + n_3\hat{x}_3 = \sigma\upsilon\nu\theta_1\hat{x}_1 + \sigma\upsilon\nu\theta_2\hat{x}_2 + \sigma\upsilon\nu\theta_3\hat{x}_3$$

όπου $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3,$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα.

Με βάση την πρώτη συνθήκη οι δυνάμεις (τάση Χ επιφάνεια) κατά τη διεύθυνση x_1, θα είναι ίσες με μηδέν:

$$\Sigma F_1 = 0 = p_{11}\Delta S_1 + p_{21}\Delta S_2 + p_{31}\Delta S_3 - \tau_1\Delta S_n = p_{11}\Delta S_n\sigma\upsilon\nu\theta_1 + p_{21}\Delta S_n\sigma\upsilon\nu\theta_2 + p_{31}\Delta S_n\sigma\upsilon\nu\theta_3 - \tau_1\Delta S_n$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$\tau_1 = p_{11}\, n_1 + p_{21}\, n_2 + p_{31}\, n_3$$

Ομοίως και για τους άξονες x_2 και x_3.

2.2. Συνθήκες Ισορροπίας (συνέχεια)

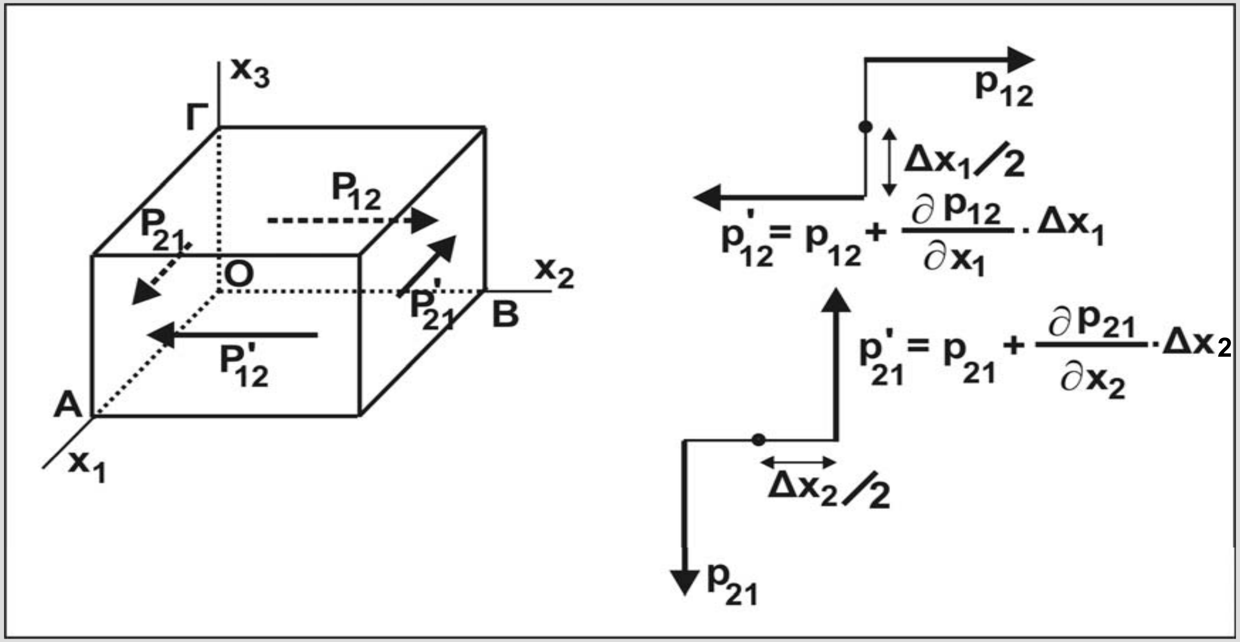
Δεύτερη συνθήκη ισοροπίας

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας, δηλαδή, τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών οι οποίες ασκούνται σε στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο που έχει κορυφή το σημείο Ο μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\boxed{p_{12} = p_{21}, \quad p_{13} = p_{31}, \quad p_{23} = p_{32}}$$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι η τάση σε σημείο ελαστικού σώματος είναι συμμετρικός τανυστής. Συνεπώς, ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών τάσης που ορίζουν πλήρως την τάση σε τυχόν σημείο ελαστικού σώματος είναι έξη.

2.2. Συνθήκες Ισορροπίας *(συνέχεια)*



Το άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα x_3 για το κέντρο του κύβου είναι ίσο με μηδέν, αφού το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία.

Επομένως

$$\left[p_{12}\Delta x_2\Delta x_3 + \left(p_{12} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1}\Delta x_1\right)\Delta x_2\Delta x_3\right]\frac{\Delta x_1}{2} - \left[p_{21}\Delta x_1\Delta x_3 + \left(p_{21} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}\Delta x_2\right)\Delta x_1\Delta x_3\right]\frac{\Delta x_2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2p_{12} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1}\Delta x_1 - 2p_{21} - \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}\Delta x_2 = 0$$

Οταν $\Delta x_1 \to 0$ και $\Delta x_2 \to 0$ τότε $p_{12} = p_{21}$. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι $p_{13} = p_{31}$ και $p_{23} = p_{32}$.

2.2. Συνθήκες Ισορροπίας *(συνέχεια)*

Επομένως στο **συμμετρικό** πίνακα του τανυστή τάσης

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Τα διαγώνια στοιχεία p_{ij}, $i=j$ (p_{11}, p_{22}, p_{33}) είναι οι κάθετες συνιστώσες τάσης.

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Τα μη διαγώνια στοιχεία p_{ij}, $i \neq j$

(p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, p_{32})

είναι οι διατμητικές συνιστώσες τάσης και

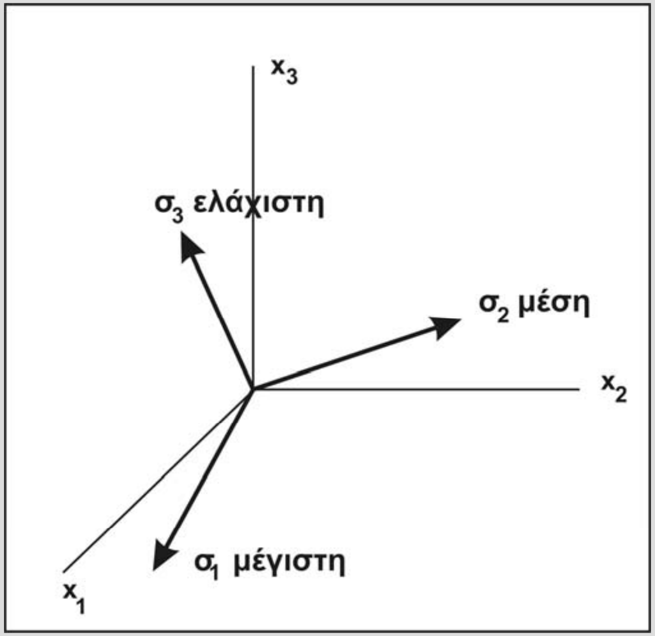
ισχύει $p_{12}=p_{21}$, $p_{13}=p_{31}$, $p_{23}=p_{32}$.

2.3. Κύριες Συνιστώσες Τάσης

Οι τάσεις που ασκούνται σε τυχόν επίπεδο το οποίο περνάει από σημείο σώματος μεταβάλλονται με τον προσανατολισμό του επιπέδου.

Υπάρχουν, όμως, τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα **και μόνον αυτά**, πάνω στα οποία οι διατμητικές τάσεις είναι ίσες με μηδέν. Τα τρία αυτά επίπεδα τέμνονται κατά τρεις διευθύνσεις που σχηματίζουν ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων και ονομάζονται **κύριοι άξονες τάσης**.

Οι τρεις κάθετες τάσεις που ασκούνται στα τρία αυτά συγκεκριμένα επίπεδα έχουν τις διευθύνσεις των τριών κυρίων αξόνων τάσης και λέγονται **κύριες κάθετες συνιστώσες τάσης**.



Σχ. 2.3. Οι τρεις κύριες συνιστώσες τάσης

Οι κύριες συνιστώσες τάσης παριστάνονται με τα σύμβολα

$\sigma 1$ (μέγιστη),

$\sigma 2$ (μέση),

$\sigma 3$ (ελάχιστη).

Τόσο οι τιμές όσο και οι διευθύνσεις των κυρίων συνιστωσών τάσης σε ένα σημείο σώματος αποτελούν αναλλοίωτα χαρακτηριστικά του σημείου όπου ασκούνται, δηλαδή, δε μεταβάλλονται με την αλλαγή των αξόνων αναφοράς.

2.3. Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(συνέχεια)*

Στο σύστημα συντεταγμένων των κύριων αξόνων τάσης ο πίνακας pij θα είναι διαγώνιος, δηλαδή

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Η εύρεση των κύριων συνιστωσών τάσης ισοδυναμεί με διαγωνιοποίηση συμμετρικού πίνακα, δηλαδή, με εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του. Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τις συνιστώσες τάσης, p_{ij}, ως προς τυχόν σύστημα αναφοράς, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των τριών κυρίων συνιστωσών τάσης σ_1, σ_2, σ_3 με βάση τη σχέση:

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\sigma & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

2.3. Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(συνέχεια)*

Κάνοντας τις πράξεις

$$(p_{11}-\sigma)\begin{vmatrix} p_{22}-\sigma & p_{23} \\ p_{32} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} - p_{12}\begin{vmatrix} p_{21} & p_{23} \\ p_{31} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} + p_{13}\begin{vmatrix} p_{21} & p_{22}-\sigma \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(p_{11}-\sigma)[(p_{22}-\sigma)(p_{33}-\sigma)-p_{23}p_{32}]-p_{12}[p_{21}(p_{33}-\sigma)-p_{23}p_{31}]+p_{13}[p_{21}p_{32}-p_{31}(p_{22}-\sigma)]=0$$

προκύπτει η τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση (χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα):

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

όπου

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33}$$

$$I_2 = p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{33}p_{11} - p_{23}^2 - p_{31}^2 - p_{12}^2$$

$$I_3 = p_{11}p_{22}p_{33} - 2p_{12}p_{23}p_{31} + p_{11}p_{23}^2 + p_{22}p_{31}^2 + p_{33}p_{12}^2$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι τιμές των τριών κυρίων συνιστωσών τάσης σ_1, σ_2, σ_3 .

2.3. Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(συνέχεια)*

Από τις ιδιότητες της τριτοβάθμιας εξίσωσης προκύπτει ότι:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

Επομένως :

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

Το δεύτερο μέρος της σχέσης αυτής είναι σταθερό στο σημείο Ο, γιατί κάθε μια τιμή σ_1, σ_2, σ_3 είναι σταθερή σε κάθε σημείο. Συνεπώς και το πρώτο μέλος είναι σταθερό για κάθε σημείο.

Δηλαδή, **το άθροισμα των μέτρων των κάθετων συνιστωσών τάσης σε κάθε σημείο φυσικού σώματος αποτελεί σταθερά, και είναι συνεπώς ανεξάρτητο από το σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο θεωρούμε τις συνιστώσες τάσης.**

2.3. Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(συνέχεια)*

Έστω σ_I μια από τις τρεις κύριες συνιστώσες τάσης και n_{1I}, n_{2I}, n_{3I}, τα κατευθύνοντα συνημίτονα ως προς τους άξονες x_1, x_2, x_3, αντίστοιχα, του μοναδιαίου ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή. Τότε θα ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
(p_{11}-\sigma_I)n_{1I} + p_{12}n_{2I} + p_{13}n_{3I} &= 0 \\
p_{21}n_{1I} + (p_{22}-\sigma_I)n_{2I} + p_{23}n_{3I} &= 0 \\
p_{31}n_{1I} + p_{32}n_{2I} + (p_{33}-\sigma_I)n_{3I} &= 0
\end{aligned}
$$

Ο υπολογισμός των n_{1I}, n_{2I}, n_{3I}, γίνεται επιλύοντας το γραμμικό αυτό σύστημα.

2.3. Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(συνέχεια)*

Ο υπολογισμός των n_{1I}, n_{2I}, n_{3I}, γίνεται επίσης με τις σχέσεις

$$n_{1I} = M_1 C = \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} \qquad n_{2I} = M_2 C = \frac{M_2}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} \qquad n_{3I} = M_3 C = \frac{M_3}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}$$

όπου

$$M_1 = \begin{vmatrix} p_{22} - \sigma_I & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} - \sigma_I \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} p_{23} & p_{21} \\ p_{33} - \sigma_I & p_{31} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} p_{21} & p_{22} - \sigma_I \\ p_{31} & p_{23} \end{vmatrix}, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}$$

2.3.1 Κύριες Διατμητικές Τάσης

Κύριες διατμητικές τάσεις

Οι διατμητικές τάσεις παίρνουν τις ακραίες τους τιμές $\tau_{1/2}$, $\tau_{2/3}$, $\tau_{1/3}$ στα τρία επίπεδα που διχοτομούν τις στερεές γωνίες των κυρίων επιπέδων τάσης. Αυτές λέγονται **κύριες διατμητικές τάσεις** και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \qquad \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

Στα επίπεδα που οι διατμητικές τάσεις παίρνουν αυτές τις ακραίες τιμές οι **κάθετες συνιστώσες τάσης** παίρνουν τιμές που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \qquad \sigma_{1/2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \qquad \sigma_{3/1} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$$

Για να περιγράψουμε με παραστατικό τρόπο την κατανομή των τάσεων σε ένα σημείο σώματος, θεωρούμε διάφορες επιφάνειες (συνήθως ελλειψοειδή που περιβάλλουν το σημείο και παριστάνουν τη μεταβολή του διανύσματος της τάσης προς τις διάφορες διευθύνσεις). Μια τέτοια επιφάνεια είναι το **ελλειψοειδές του Lamé**, το οποίο ορίζεται έτσι ώστε η απόσταση του κέντρου του από το εφαπτόμενο επίπεδο σε οποιοδήποτε σημείο του να είναι ίση με το διάνυσμα τάσης που ασκείται στο επίπεδο αυτό.

Οι τρεις ημιάξονες του ελλειψοειδούς αυτού έχουν μήκη ίσα με τις κύριες κάθετες συνιστώσες τάσης σ_1, σ_2, σ_3.

2.3.2. Ανάλυση του Τανυστή Τάσης

<u>Ανάλυση του Τανυστή Τάσης</u>

<u>Ως προς τυχόν σύστημα αξόνων</u> η τάση, ως συμμετρικός τανυστής, αναλύεται σε ένα **ισοτροπέα** και σε ένα **εκτροπέα:**

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{33} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11}-\sigma_o & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma_o & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma_o \end{vmatrix}$$

Όπου $\sigma_0 = I_1/3$ $\quad (I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.   Η σ_0 λέγεται **μέση κάθετη τάση**.

Φυσικά αν ως σύστημα αξόνων θεωρήσουμε το <u>σύστημα των κυρίων αξόνων τάσης</u> τότε:

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

2.4. Μονάδες Τάσης

Η μονάδα τάσης (και πίεσης):

Στο σύστημα CGS: 1 **dyn/cm²**.
Στο σύστημα IS: 1 **Pa** (=1 Pascal)=1 **Nt/m²**

1 Pa = 10 dyn/cm²

Άλλη μονάδα τάσης είναι το 1 **bar** = 10^6 dyn/cm²

1 MPa = 10 bar

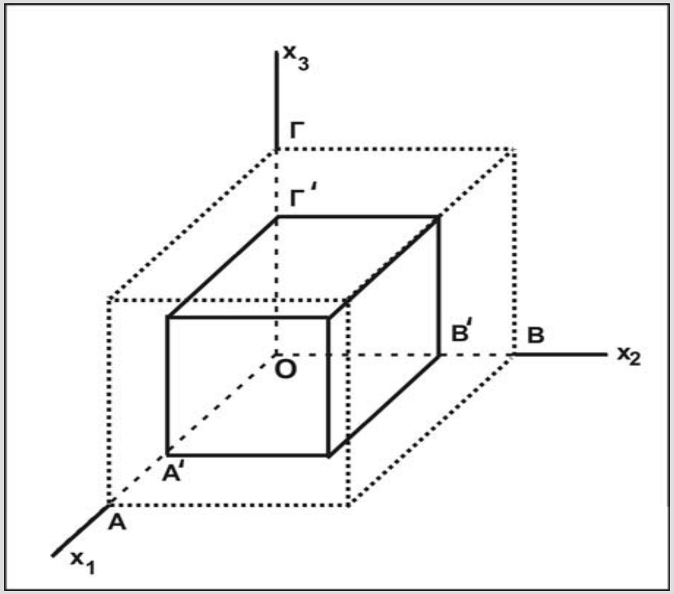
- Η μεταβολή της τάσης κατά τη διάδοση των σεισμικών κυμάτων (δυναμική τάση) είναι της τάξης των 5 Pa.
- Η διατμητική τάση στη λιθόσφαιρα της Γης κυμαίνεται πιθανώς μεταξύ 10 MPa και 20 MPa.
- Η πτώση τάσης κατά τη γένεση ενός σεισμού (διαφορά τάσης στην εστία του πριν και μετά τη γένεσή του) είναι, κατά μέσο όρο, 4 MPa.
- Η στατική πίεση στο εσωτερικό της Γης είναι 16 MPa σε βάθος 25 Km (στο φλοιό), 80 MPa στον κάτω μανδύα και 350 MPa στον εσωτερικό πυρήνα της Γης, κατά προσέγγιση.

2.5. Παραμόρφωση σε Σημείο Σώματος

Η **ολική παραμόρφωση** στερεού σώματος στη γειτονιά ενός σημείου, Ο, δηλαδή η συνολική παραμόρφωση ενός μικρού τμήματος (στοιχείου) του σώματος γύρω από το σημείο μπορεί να αναλυθεί σε τρία μέρη:

- **Μεταβολή του όγκου του στοιχείου (κυβική παραμόρφωση)**
- **Μεταβολή του σχήματος του στοιχείου (διατμητική παραμόρφωση)**
- **Περιστροφή του στοιχείου**

2.5.1. Κυβική Παραμόρφωση



Σχ. 2.4. Κυβική παραμόρφωση στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου.

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε την παραμόρφωση στερεού ελαστικού σώματος στη γειτονιά τυχόντος σημείου, Ο, του σώματος (σχ. 2.4).

Θεωρούμε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων x_1, x_2, x_3, που περνάν από το Ο και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όγκου V που έχει πλευρές ΟΑ=δx_1, ΟΒ=δx_2, ΟΓ=δx_3.

Ας υποθέσουμε ότι υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων συμβαίνει μεταβολή μόνο του **όγκου** του παραλληλεπιπέδου και ότι οι νέες θέσεις των Α, Β, Γ, είναι Α΄, Β΄, Γ΄, όπου

ΑΑ΄=δu_1, ΒΒ΄=δu_2 και ΓΓ΄= δu_3.

Θα είναι (όταν $\Delta V \rightarrow 0$):

$$\lim \frac{\delta u_1}{\delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad , \quad \lim \frac{\delta u_2}{\delta x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad , \quad \lim \frac{\delta u_3}{\delta x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Ονομάζουμε <u>**ανηγμένες επιμηκύνσεις**</u> κατά τις διευθύνσεις των τριών αξόνων τις ποσότητες e_{11}, e_{22}, e_{33}, που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

2.5.1. Κυβική Παραμόρφωση (συνέχεια)

Η κυβική παραμόρφωση παριστάνεται με τον πίνακα e_{ij}, όπου $i=j$.

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}$$

Η κυβική παραμόρφωση είναι τανυστής δεύτερης τάξης του οποίου μόνο τα διαγώνια στοιχεία είναι μη μηδενικά.

Ονομάζουμε **ανηγμένη κυβική παραμόρφωση**, θ, τη μεταβολή δV του όγκου ενός στοιχείου του σώματος δια του αρχικού όγκου, V, του στοιχείου:

$$\theta = \frac{\delta V}{V}$$

2.5.1. Κυβική Παραμόρφωση *(συνέχεια)*

Έστω ότι ο αρχικός όγκος $V_o=Y_1 Y_2\ Y_3$ και ο τελικός όγκος $V=Y_1{'}Y_2{'}Y_3{'}$.

Από τον ορισμό των ποσοτήτων e_{11}, e_{22}, e_{33} προκύπτει ότι

$Y_1{'}= Y_1+ e_{11}\, Y_1, \quad Y_2{'}= Y_2+ e_{22}\, Y_2, \quad Y_3{'}= Y_3+ e_{33}\, Y_3\, .$

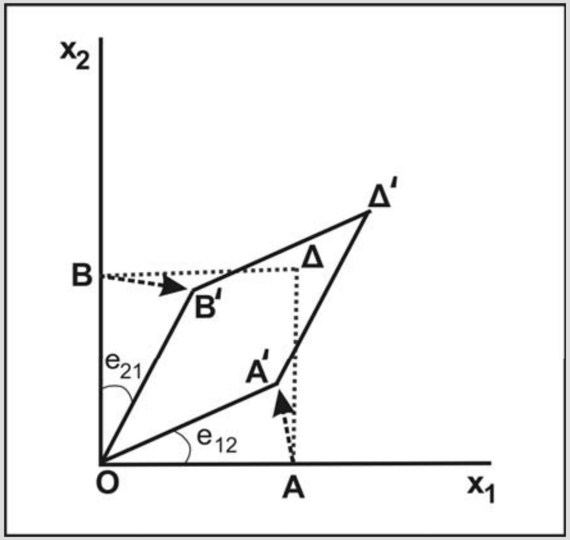
Από τις σχέσεις αυτές εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\theta= e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

δηλαδή η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση, θ, είναι το ί χ ν ο ς του τανυστή της κυβικής παραμόρφωσης.

Η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση, θ, παραμένει αμετάβλητη κατά την αλλαγή των αξόνων και συνεπώς η ποσότητα αυτή είναι μονόμετρο μέγεθος.

2.5.2. Διατμητική Παραμόρφωση



Σχ. 2.5. Διατμητική παραμόρφωση (μεταβολή σχήματος)

Ας θεωρήσουμε το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο του σχήματος (2.4) και έστω ότι η τομή του παραλληλεπιπέδου με το επίπεδο Ox_1x_2 είναι ΟΑΔΒ. Μετά την παραμόρφωση του παραλληλεπιπέδου, το ΟΑΔΒ παίρνει τη μορφή ΟΑ΄Δ΄Β΄ (σχ. 2.5).

Επειδή οι μεταθέσεις θεωρούνται στοιχειώδεις, μπορούμε να θεωρήσουμε τα ΑΑ΄ και ΒΒ΄ παράλληλα προς τους άξονες Ox_2 και Ox_1, αντίστοιχα και να βάλουμε

ΑΑ΄= δu_2 και ΒΒ΄= δu_1.

Επομένως θα είναι

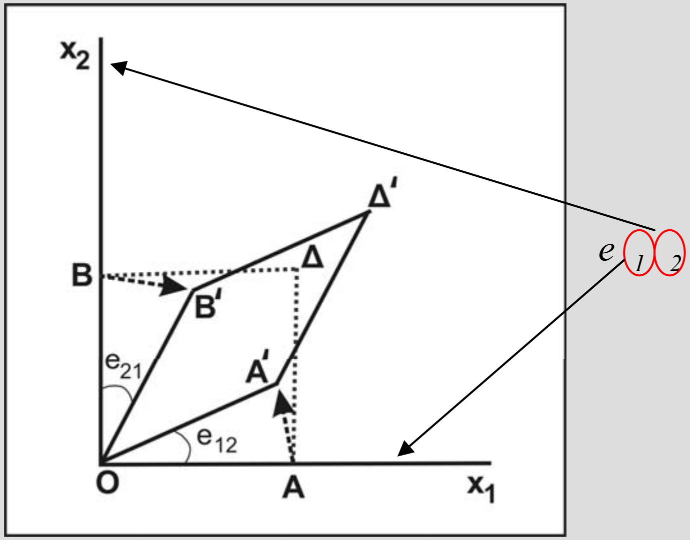
$$\lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x_2}+\frac{\delta u_2}{\delta x_1}\right)=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Ονομάζουμε **<u>ανηγμένη διατμητική παραμόρφωση</u>** του σώματος στο σημείο κάθετα προς τον άξονα Ox_3 την ποσότητα που παριστάνεται με το σύμβολο e_{12} ή e_{21} και ορίζεται από τη σχέση:

$$e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

2.5.2. Διατμητική Παραμόρφωση *(συνέχεια)*

Γωνίες διάτμησης: Είναι οι γωνίες ΒΟΒ΄= e_{21} και ΑΟΑ΄=e_{12}.



Ο πρώτος δείκτης του συμβόλου της ανηγμένης διατμητικής παραμόρφωσης παριστάνει τον άξονα που βρίσκεται το στοιχειώδες ευθύγραμμο τμήμα.

Ο δεύτερος δείκτης παριστάνει τον άξονα παράλληλα προς τον οποίο πραγματοποιείται η στοιχειώδης μετάθεση.

2.5.2. Διατμητική Παραμόρφωση (συνέχεια)

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι ανηγμένες παραμορφώσεις κάθετα προς τους άξονες Ox_1 και Ox_2.

Αυτές δίνονται από τις σχέσεις:

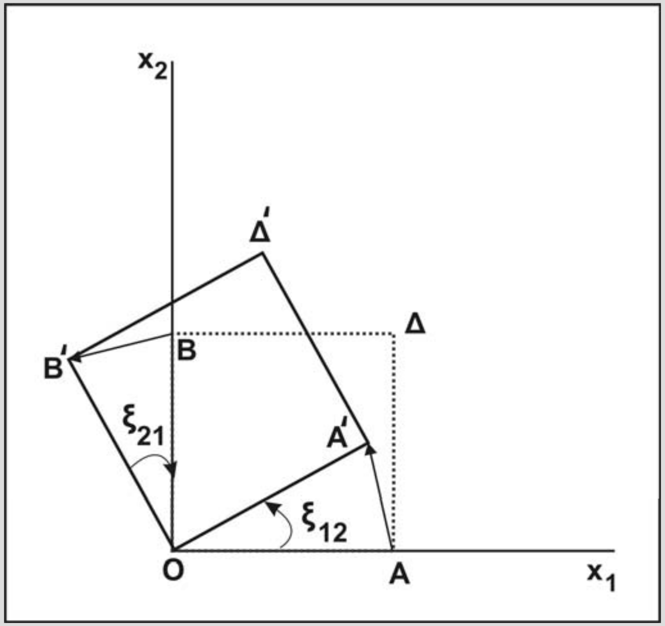
$$e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \qquad e_{31} = e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$

Η ανηγμένη διατμητική παραμόρφωση παριστάνεται με τον πίνακα e_{ij} όπου $i \neq j$.

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 0 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως η παραμόρφωση αυτή είναι ένας συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης.

2.5.3. Περιστροφή



Σχ. 2.6. Περιστροφή στοιχειώδους ορθογωνίου.

Κατά την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων πάνω σε στερεό σώμα το στοιχείο του σώματος γύρω από το σημείο Ο, εκτός από την κυβική και διατμητική του παραμόρφωση, περιστρέφεται και κατά ορισμένη γωνία.

Έστω ότι η τομή του στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου (σχ. 2.4) με το επίπεδο Ox_1x_2 είναι ΟΑΔΒ. Μετά τη στοιχειώδη περιστροφή, το ΟΑΔΒ παίρνει τη θέση ΟΑ΄Δ΄Β΄ (σχ. 2.6).

Θα είναι ΑΑ΄= δu_2 και ΒΒ΄= $-\delta u_1$

(η στοιχειώδης μετάθεση ΒΒ΄ έχει κατεύθυνση προς το αρνητικό μέρος του άξονα Ox_1). Θα είναι:

$$\lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{\delta u_2}{\delta x_1} - \frac{\delta u_1}{\delta x_2}\right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Ονομάζουμε **_στοιχειώδη περιστροφή_** το σώματος στο σημείο Ο γύρω από τον άξονα Ox_3, κατά τη φορά που δείχνει το σχήμα (2.6), την ποσότητα που παριστάνεται με το σύμβολο ξ_{21} και ορίζεται από τη σχέση:

$$\xi_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

2.5.3. Περιστροφή *(συνέχεια)*

Η στοιχειώδης περιστροφή κάθετα προς τον άξονα Ox_3 αλλά κατά την αντίθετη φορά παριστάνεται με το σύμβολο $\xi_{12} = -\xi_{21}$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι στοιχειώδεις περιστροφές $\xi_{32} = -\xi_{23}$ και $\xi_{13} = -\xi_{31}$ γύρω από τους άξονες Ox_1 και Ox_2.

Η περιστροφή παριστάνεται με τον πίνακα ξ_{ij} όπου $i \neq j$.

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & 0 & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως η περιστροφή του στοιχείου είναι τανυστής δεύτερης τάξης και μάλιστα αντισυμμετρικός τανυστής (αφού $\xi_{12} = -\xi_{21}$, $\xi_{32} = -\xi_{23}$ και $\xi_{13} = -\xi_{31}$)

2.5.4. Ολική Παραμόρφωση

Η **ολική παραμόρφωση** είναι **τανυστής δεύτερης τάξης**, E_{ij}, και αναλύεται σε ένα συμμετρικό τανυστή, e_{ij}, ο οποίος είναι το άθροισμα του τανυστή κυβικής παραμόρφωσης και του τανυστή διατμητικής παραμόρφωσης, και σε έναν αντισυμμετρικό τανυστή, ξ_{ij}, ο οποίος είναι ο τανυστής περιστροφής. Δηλαδή,

$$E_{ij} = e_{ij} + \xi_{ij}$$

Επειδή οι συνιστώσες του τανυστή περιστροφής κατά τη διάδοση των σεισμικών κυμάτων έχουν ασήμαντες τιμές αυτός συνήθως παραλείπεται και η ολική παραμόρφωση παριστάνεται από τον **συμμετρικό** τανυστή:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

2.5.4. Ολική Παραμόρφωση *(συνέχεια)*

Ο τανυστής παραμόρφωσης, e_{ij}, ως συμμετρικός τανυστής, έχει ανάλογες ιδιότητες μ' αυτές που έχουν αναφερθεί για τον τανυστή τάσης:

• Οι τιμές των έξη συνιστωσών της ανηγμένης παραμόρφωσης σε τυχόν σημείο Ο του σώματος εξαρτώνται από τον προσανατολισμό του τρισορθογωνίου συστήματος αξόνων ως προς το οποίο θεωρούμε τις συνιστώσες αυτές. Όταν, όμως, γνωρίζουμε αυτές ως προς ορισμένο σύστημα αξόνων, μπορούμε να βρούμε τις τιμές τους σε σχέση με οποιοδήποτε άλλο σύστημα αξόνων.

•Υπάρχει ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων που καθορίζουν τρία επίπεδα, πάνω στα οποία οι διατμητικές παραμορφώσεις είναι ίσες με μηδέν. Οι άξονες αυτοί λέγονται κύριοι άξονες παραμόρφωσης και οι ανηγμένες επιμηκύνσεις κατά μήκος των αξόνων αυτών λέγονται κύριες ανηγμένες επιμηκύνσεις και παριστάνονται με τα σύμβολα ε_1, ε_2 και ε_3.

•Στην περίπτωση ισότροπου ελαστικού μέσου, οι κύριοι άξονες παραμόρφωσης συμπίπτουν με τους κύριους άξονες τάσης.

•Ανάλογες σχέσεις με αυτή του τανυστή τάσης ισχύουν για τον υπολογισμό των τιμών των ε_1, ε_2, ε_3. και των διευθύνσεών τους.

Οι συνιστώσες της ανηγμένης παραμόρφωσης, e_{ij}, ως λόγοι μηκών είναι **αδιάστατα μεγέθη**.

Οι τιμές τις οποίες πρέπει να αποκτήσουν οι συνιστώσες της ανηγμένης παραμόρφωσης για να σπάσουν τα πετρώματα της Γης είναι της τάξης του 10^{-4}, ενώ οι τιμές τους κατά τη διάδοση των σεισμικών κυμάτων είναι της τάξης του 10^{-11}.

2.5.5. Στοιχειώδης μετάθεση

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

Έστω ένα σημείο $\Sigma(x_1, x_2, x_3)$ του οποίου οι συνιστώσες μετάθεσής κατά την παραμόρφωση του σώματος είναι u_1, u_2, u_3 και

ένα σημείο $\Sigma'(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ του οποίου οι συνιστώσες της μετάθεσης θα είναι $u_1+du_1, u_2+du_2, u_3+du_3$.

Οι διαφορές du_1, du_2, du_3 στις συνιστώσες μεταθέσεις των δύο σημείων θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$du_i = \sum_{j=1}^{3} e_{ij} dx_j \quad i = 1,2,3.$$

Επομένως για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της σχετικής μετάθεσης du_i δύο υλικών σημείων, τα οποία απέχουν στοιχειώδη απόσταση dx_i, πρέπει να γνωρίζουμε τις συνιστώσες του τανυστή ανηγμένης παραμόρφωσης e_{ij}.

2.6. Σχέση Μεταξύ Τάσης και Ανηγμένης Παραμόρφωσης

Η ανηγμένη παραμόρφωση σε σημείο τέλεια ελαστικού σώματος καθορίζεται πλήρως από την τάση στο σημείο αυτό για δοσμένες θερμοδυναμικές συνθήκες.

Για ένα τελείως ελαστικό σώμα ισχύει ο ***γενικευμένος νόμος του Hooke***, που ορίζει ότι:

"Κάθε συνιστώσα τάσης σε οποιοδήποτε σημείο τελείως ελαστικού σώματος είναι γραμμική συνάρτηση των συνιστωσών της ανηγμένης παραμόρφωσης"

Η σχέση που συνδέει τις εννέα συνιστώσες τάσης με τις εννέα συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης στη γενική περίπτωση είναι:

$$p_{ij} = c_{ijkl}\, e_{kl} \equiv \sum_{k=1,3} \sum_{l=1,3} c_{ijkl}\, e_{kl}$$

Στη γενική αυτή περίπτωση υπάρχουν 81 συντελεστές αναλογίας c_{ijkl} $(i,\ j,\ k,\ l=1,2,3)$. Οι συντελεστές αυτοί λέγονται ελαστικές σταθερές και εξαρτώνται από το υλικό του σώματος και από τις θερμοδυναμικές συνθήκες.

Ο c_{ijkl} καλείται **ελαστικός τανυστής** και είναι τανυστής τέταρτης τάξεως.

2.6. Σχέση Μεταξύ Τάσης και Ανηγμένης Παραμόρφωσης *(συνέχεια)*

Επομένως κάθε συνιστώσα τάσης συνδέεται με εννέα συντελεστές με τις εννέα συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης, π.χ.

$$p_{11}=c_{1111}e_{11}+c_{1112}e_{12}+c_{1113}e_{13}+c_{1121}e_{21}+c_{1122}e_{22}+c_{1123}e_{23}+c_{1131}e_{31}+c_{1132}e_{32}+c_{1133}e_{33}$$

Επειδή η τάση και η παραμόρφωση είναι συμμετρικοί τανυστές οι ανεξάρτητοι συντελεστές c_{ijkl} είναι 36 ($p_{ij}=p_{ji} \rightarrow c_{ijkl}=c_{jikl}$ και $e_{kl}=e_{lk} \rightarrow c_{ijkl}=c_{ijlk}$).

Επίσης για να είναι η ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης μονοσήμαντη συνάρτηση των συνιστωσών της ανηγμένης παραμόρφωσης, πρέπει να ισχύει $c_{ijkl}=c_{klij}$ και οι ανεξάρτητοι συντελεστές c_{ijkl} μειώνονται στους 21.

Όταν το σώμα είναι ισότροπο, οι γραμμικές σχέσεις, που συνδέουν κάθε συνιστώσα τάσης με τις συνιστώσες της ανηγμένης παραμόρφωσης, πρέπει να ισχύουν και όταν θεωρήσουμε σύστημα αξόνων που προκύπτουν από τους x_1, x_2, x_3 με αλλαγή των προσήμων καθώς και όταν εναλλάξουμε αμοιβαία τις θέσεις των αξόνων με κατάλληλη περιστροφή. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες αυτές, προκύπτει ότι ο αριθμός των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών ελαττώνεται σε δύο. Ως ελαστικές σταθερές μπορούμε να θεωρήσουμε τις c_{11} και c_{12}. Έτσι, για ισότροπο ελαστικό σώμα ισχύουν οι σχέσεις:

2.6. Σχέση Μεταξύ Τάσης και Ανηγμένης Παραμόρφωσης (συνέχεια)

Έτσι, για ισότροπο ελαστικό σώμα ισχύουν οι σχέσεις:

$$p_{ij}=c_{12}\theta\delta_{ij} + (c_{11}-c_{12})\delta_{ij} + (c_{11}-c_{12})e_{ij} \quad i, j=1, 2, 3$$

όπου θ είναι η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση και δ_{ij} ο **<u>τανυστής Kronecker</u>** (που αντιστοιχεί σε μοναδιαίο πίνακα), για τον οποίο ισχύει

$\delta_{ij}=1$ όταν $i=j$ και $\delta_{ij}=0$ όταν $i\neq j$.

Αντί των σταθερών c_{11} και c_{12} χρησιμοποιούνται συνήθως οι **<u>σταθερές του Lamé</u>** λ και μ, που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\lambda = c_{12}, \quad \mu = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}$$

Επομένως για ένα ελαστικό και ισότροπο μέσο ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boxed{p_{ij}= \lambda\, \theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad i, j=1, 2, 3}$$

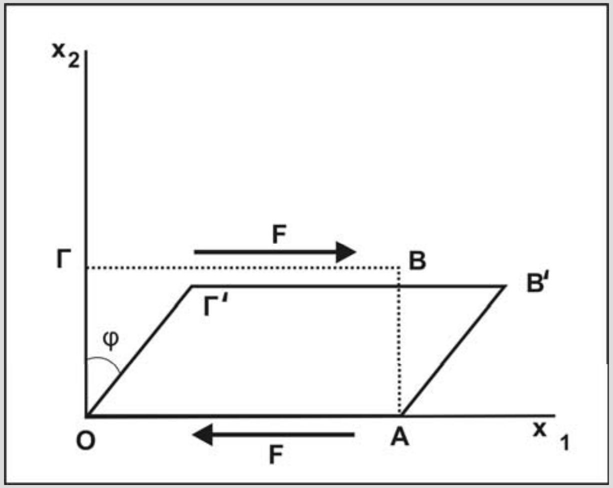
δηλαδή

$$p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \qquad p_{12} = 2\mu e_{12}$$
$$p_{22} = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \qquad p_{23} = 2\mu e_{23}$$
$$p_{33} = \lambda\theta + 2\mu e_{33} \qquad p_{31} = 2\mu e_{31}$$

2.6.1. Ελαστικές Σταθερές

Οι δύο σταθερές του Lamé αρκούν για την περιγραφή της ελαστικής παραμόρφωσης ελαστικού και ισότροπου μέσου. Χρησιμοποιούνται, όμως, διάφορες άλλες ελαστικές σταθερές, που συνδέονται με τις σταθερές του Lamé, αλλά καθορίζονται ευκολότερα πειραματικά. Απ' αυτές χρησιμοποιούνται συνηθέστερα οι ακόλουθες:

α) Μέτρο διατμητικής ελαστικότητας ή μέτρο ακαμψίας, n.



Σχ. 2.7. Διατμητική παραμόρφωση ορθογωνίου

Θεωρούμε το ορθογώνιο ΟΑΒΓ (σχ. 2.7). Αν στις δύο έδρες του παραλληλεπίπεδου ασκηθούν παράλληλα προς τον άξονα Ox_1 δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις, το παραλληλεπίπεδο θα πάθει διατμητική παραμόρφωση κατά μία γωνία διάτμησης $\varphi=e_{21}=e_{12}$. Η αντίστοιχη διατμητική συνιστώσα τάσης θα είναι $p_{21}=p_{12}=F/S$, όπου S είναι το εμβαδόν της επιφάνειας όπου ασκείται η F.

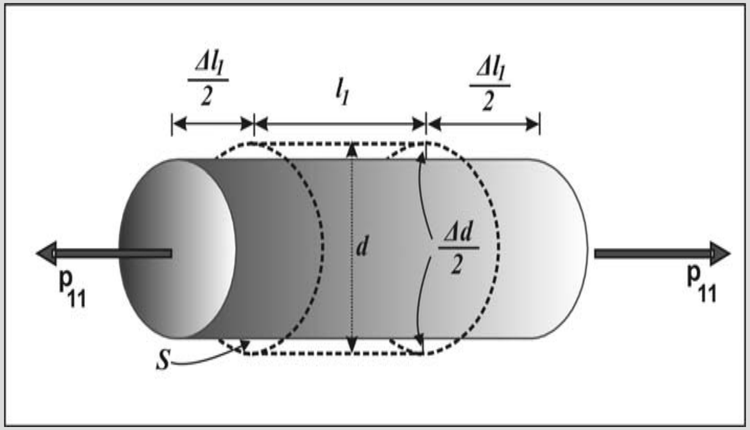
Ονομάζουμε **μέτρο διατμητικής ελαστικότητας ή μέτρο ακαμψίας, n,** μια ποσότητα n που ορίζεται από τη σχέση:

$$n = \frac{p_{12}}{e_{12}}$$

Εύκολα προκύπτει ότι $n=2\mu$. Τα n και μ μετριούνται σε μονάδες τάσης. Η σταθερά του Lamé μ είναι μέτρο της αντίστασης ενός υλικού στη διάτμηση. Τυπική τιμή για τα πετρώματα της Γης είναι $2.10^{11} dyn/cm^2$ ή $200\ kbar$.

2.6.1. Ελαστικές Σταθερές *(συνέχεια)*

β) Μέτρο επιμήκους ελαστικότητας ή μέτρο του Young, E.



Σχ. 2.8. Μεταβολή των διαστάσεων ράβδου κατά την ελαστική επιμήκυνσή της.

Ας θεωρήσουμε κυλινδρική ράβδο μήκους l_1 και τομής S, η οποία επιμηκύνεται (ή επιβραχύνεται) κατά Δl_1 υπό την επίδραση δύναμης, F, που έχει τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου. Έστω ότι ο άξονας αυτός έχει τη διεύθυνση x_1.

Θα είναι: $p_{11}=F/S$ και $e_{11}=\Delta l_1/l_1$.

Ονομάζουμε **<u>μέτρο επιμήκους ελαστικότητας ή μέτρο του Young, E</u>,** του υλικού, το πηλίκο της κάθετης τάσης προς την ανηγμένη επιμήκυνση:

$$E = \frac{p_{11}}{e_{11}}$$

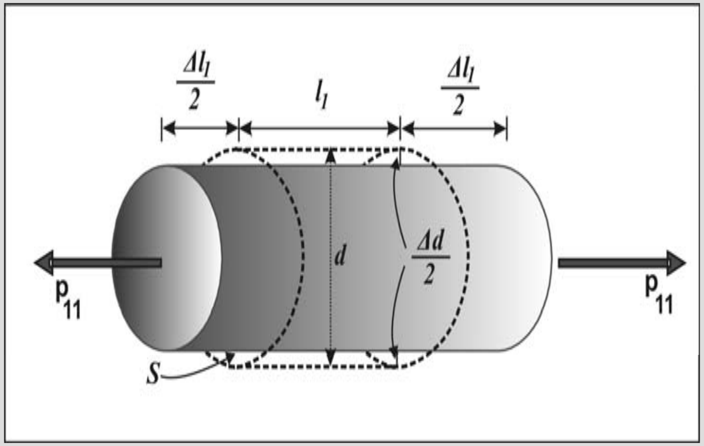
Αν στις σχέσεις $p_{ij}= \lambda\, \theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$ θέσουμε $p_{11}= p_{22}= 0$ βρίσκουμε ότι:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Το αντίστροφο, $1/E$, του μέτρου της επιμήκους ελαστικότητας λέγεται **<u>συντελεστής ελαστικότητας</u>**.

Το E μετριέται σε μονάδες τάσης.

γ) Λόγος του Poisson, σ.



Μεταβολή των διαστάσεων ράβδου κατά την ελαστική επιμήκυνσή της.

Οι επιβραχύνσεις κατά τις κάθετες στον άξονα της ράβδου διευθύνσεις θα είναι Δd, αν d είναι η διάμετρος της τομής της ράβδου.

Επομένως θα είναι $e_{22} = e_{33} = -\Delta d/d$

Ονομάζουμε **<u>λόγο του Poisson, σ</u>**, την ποσότητα:

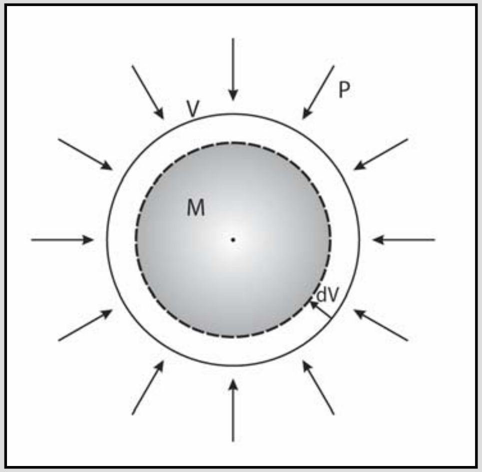
$$\sigma = -\frac{e_{22}}{e_{11}}$$

Αν στις σχέσεις $p_{ij} = \lambda\, \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$ θέσουμε $p_{11} = p_{22} = 0$ βρίσκουμε ότι: $$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Ο λόγος του Poisson είναι <u>αδιάστατο μέγεθος</u> και παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 0.5. Η μέγιστη τιμή ισχύει για τα ρευστά ($\mu=0$, μηδενική αντίσταση στη διάτμηση) ενώ $\sigma=0$ σημαίνει άπειρη αντίσταση στη διάτμηση.

Στα περισσότερα υλικά της Γης ο λόγος του Poisson έχει τιμές μεταξύ 0.22 και 0.35.

δ) Μέτρο κυβικής ελαστικότητας, *κ*.



Παραμόρφωση σώματος (μείωση όγκου κατά dV) υπό την άσκηση ισότροπης τάσης *P*.

Έστω ότι πάνω σε ένα σώμα ασκείται ομοιόμορφα κάθετη τάση (συμπίεσης ή εφελκυσμού), P, δηλαδή, εφαρμόζεται στο σώμα ομοιόμορφα υδροστατική πίεση που μεταβάλλει τον όγκο του σώματος.

θ είναι η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση του σώματος, που ισούται αριθμητικά με τη μεταβολή της κάθε μονάδας όγκου του σώματος.

Ονομάζουμε **μέτρο κυβικής ελαστικότητας, *κ*,** την ποσότητα:

$$\kappa = -\frac{P}{\theta}$$

Στην περίπτωση της υδροστατικής πίεσης, ο τανυστής της τάσης έχει τη μορφή $p_{ij}=-P\delta_{ij}$, όπου δ_{ij} ο τανυστής Kronecker, δηλαδή $p_{11}=p_{22}=p_{33}=-P$ και $p_{ij}=0$ για $i\neq j$. Αν Αν στις σχέσεις $p_{ij}=\lambda\,\theta\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$ θέσουμε τις τιμές αυτές βρίσκουμε ότι:

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Το κ μετριέται σε μονάδες τάσης.