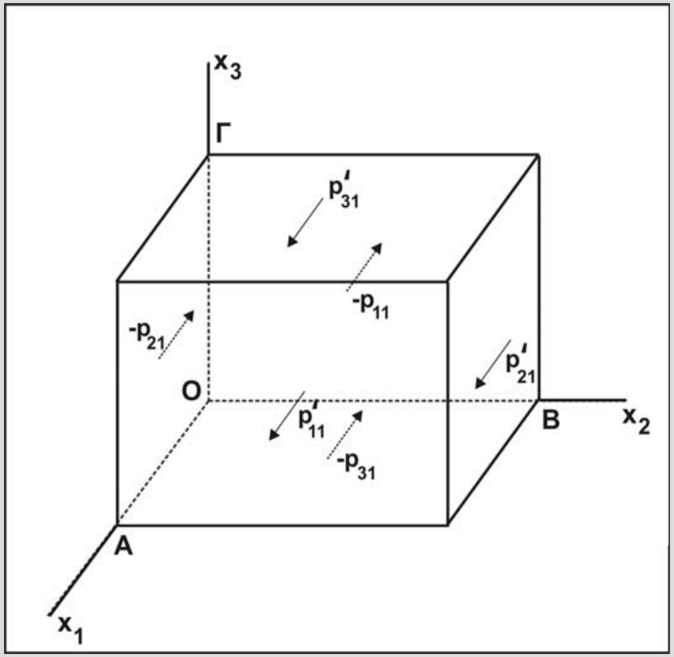
Μάθημα 3ο

Στοιχεία Θεωρίας Ελαστικών Κυμάτων

- Εξίσωση της Κίνησης
- Εξίσωση του Κύματος
- Εξίσωση Διανυσματικού Κύματος
- Στάσιμα Κύματα
- Ελαστικά Κύματα Χώρου
- Επιφανειακά Κύματα

3.1. Εξίσωση της Κίνησης



Σχ. 3.1.Τάσεις που ασκούνται στις έδρες του στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου παράλληλα προς τον άξονα x_1.

Η μάζα, δm, της ύλης που περιλαμβάνεται μέσα στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο (Σχ. 3.1) θα *είναι*:

$$\delta m = \rho \delta V$$

όπου ρ η πυκνότητα και $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$.

Έστω ότι η στοιχειώδης μάζα μετατίθεται από τη θέση ισορροπίας της και ότι οι συνιστώσες του διανύσματος μετάθεσης είναι u_1, u_2, u_3 κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Ox_1, Ox_2, Ox_3, αντίστοιχα. Η κίνηση κατά ορισμένη διεύθυνση περιγράφεται με τη θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικής

$$F_i = \delta m . \gamma_i = \rho \delta V \gamma_i = \rho \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \gamma_i$$

όπου F_i είναι η δύναμη που ασκείται κατά τη διεύθυνση x_i στη στοιχειώδη μάζα δm και γ_i η επιτάχυνση κατά την ίδια διεύθυνση.

Κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1 θα ισχύει:

$$F_1 = \delta m \, . \, \gamma_1$$

όπου

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

3.1. Εξίσωση της Κίνησης (συνέχεια)

Η δύναμη F_1 θα είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των έξη δυνάμεων που ασκούνται στις έξη έδρες του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 3.1) και έχουν τη διεύθυνση του άξονα x_1. Κάθε μία από αυτές τις δυνάμεις θα είναι ίση με την τάση που ασκείται στην αντίστοιχη έδρα επί το εμβαδόν της έδρας.

Επομένως οι δυνάμεις που ασκούνται είναι:

$-p_{11}\delta x_2 \delta x_3$

$-p_{21}\delta x_1 \delta x_3$

$-p_{31}\delta x_1 \delta x_2$

$$p'_{11}\delta x_2 \delta x_3 = \left(p_{11} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}\delta x_1 \right)\delta x_2 \delta x_3$$

$$p'_{21}\delta x_1 \delta x_3 = \left(p_{21} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}\delta x_2 \right)\delta x_1 \delta x_3$$

$$p'_{31}\delta x_1 \delta x_2 = \left(p_{31} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3}\delta x_3 \right)\delta x_1 \delta x_2$$

Προσοχή: Οι τάσεις $p'_{11}, p'_{21}, p'_{31}$ **έχουν αντίθετες κατευθύνσεις των** p_{11}, p_{21}, p_{31}

3.1. Εξίσωση της Κίνησης *(συνέχεια)*

Με αντικατάσταση στη σχέση $\Sigma F_1 = \rho\delta x_1\delta x_2\delta x_3\gamma_1$ βρίσκουμε:

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις τιμές των p_{ij} σε συνάρτηση με τις συνιστώσες μετάθεσης με βάση το νόμο του Snell ($p_{ij} = \lambda\,\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\quad i, j = 1, 2, 3$) θα προκύψει ότι

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\theta + 2\mu e_{11}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2\mu e_{21}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(2\mu e_{31}\right) = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + 2\mu\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_3}\right)$$

Οι μερικές παράγωγοι των e_{11}, e_{21}, e_{31} ως προς x_1, x_2, x_3 είναι:

$$\frac{\partial e_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \qquad \frac{\partial e_{21}}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$$

Ομοίως και για την e_{31} . Με αντικατάσταση των σχέσεων αυτών στη παραπάνω σχέση, θέτοντας:

$$\nabla^2 u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \quad , \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial e_{ii}}{\partial x_1}$$

προκύπτει ότι

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Αυτή είναι η <u>διαφορική εξίσωση της κίνησης των υλικών σημείων</u> ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση διατάραξης κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1.

Με όμοιο τρόπο προκύπτουν αντίστοιχες σχέσεις για διάδοση διαταράξεων κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x_2 και x_3. Το δεύτερο μέλος της σχέσης (3.1) αποτελείται από **δύο** όρους.

Ο πρώτος όρος παριστάνει **μεταβολή στην κυβική παραμόρφωση** και εξαρτάται και από τις δύο σταθερές του Lamé (λ και μ).

Ο δεύτερος όρος παριστάνει **μεταβολή στην εγκάρσια διατάραξη** και εξαρτάται μόνο από το μέτρο της ακαμψίας (μ).

3.2. Εξίσωση του Κύματος

Έστω ότι ένα μέγεθος u μεταβάλλεται **χωρικά** και **χρονικά**. Το μέγεθος αυτό μπορεί να είναι συνιστώσα μετάθεσης ή άλλη φυσική ποσότητα, όπως είναι η ένταση του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου. Η διαφορική εξίσωση

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u} \qquad \textbf{(3.2)}$$

παριστάνει τη γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος, όπου c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Αν υποθέσουμε την απλή περίπτωση όπου το κύμα διαδίδεται κατά τη διεύθυνση ενός άξονα, έστω του x_1, τότε η μετάθεση δεν εξαρτάται από τα x_2 και x_3 $(\partial u/\partial x_2 = \partial u/\partial x_3 = 0)$ και η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Αυτή είναι η εξίσωση του κύματος όταν η διάδοση γίνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1.

3.2. Εξίσωση του Κύματος *(συνέχεια)*

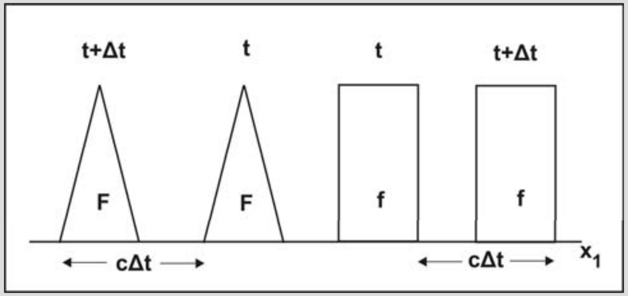
Η γενική λύση της (3.3) είναι της μορφής:

$$u = f(x_1 - ct) + F(x_1 + ct) \qquad \textbf{(3.4)}$$

Κάθε μία από τις συναρτήσεις f και F πρέπει να ικανοποιεί τις αρχικές και τις ορικές συνθήκες και παριστάνει κύμα που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1.

Το κύμα αυτό λέγεται **επίπεδο κύμα**, γιατί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή η u εξαρτάται μόνο από το x_1,(διεύθυνση διάδοσης) και είναι σταθερή σε διευθύνσεις κάθετες προς αυτήν, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή η τιμή της u είναι η ίδια σε όλα τα σημεία κάθε επιπέδου κάθετου στον άξονα x_1.

Όταν ο χρόνος μεταβληθεί κατά δt, η τιμή της f θα μείνει αμετάβλητη, αν η x_1 μεταβληθεί κατά $c\delta t$. Δηλαδή, η f αποκτάει σε χρόνο $t+\delta t$ και στη θέση $x_1+c\delta t$ την ίδια τιμή που έχει στο χρόνο t στη θέση x_1.



Σχ. 3.2. Διάδοση επιπέδου κύματος.

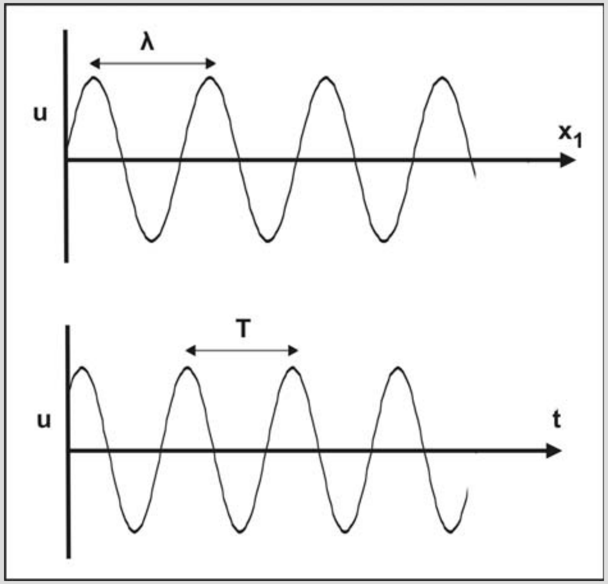
Συνεπώς, η $f(x_1-ct)$ παριστάνει κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x_1 και η $F(x_1 + ct)$ παριστάνει κύμα που διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα x_1 (σχ. 3.2).

Ειδική περίπτωση της εξίσωσης (3.4) του κύματος αποτελεί η:

$$u = A\sigma\upsilon\nu\,[\kappa(x_1 - ct) + \varphi\,] \qquad \textbf{(3.5)}$$

Αυτή παριστάνει απλό αρμονικό επίπεδο κύμα. Οι σταθερές A και φ είναι το πλάτος και η φάση του κύματος, αντίστοιχα, ενώ η σταθερά κ λέγεται κυματικός αριθμός και συνδέεται με την περίοδο T και το μήκος κύματος λ με τις σχέσεις:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\kappa c} \qquad \textbf{(3.6)}$$



Σχ. 3.3. Αρμονική μεταβολή της μετάθεσης u σε συνάρτηση με την απόσταση σε ορισμένη χρονική στιγμή (πάνω) και σε συνάρτηση με το χρόνο σε ορισμένη θέση (κάτω). Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή (t σταθερό) η u μεταβάλλεται αρμονικά με την απόσταση x_1 (σχ. 3.3 πάνω), ενώ σε οποιοδήποτε σημείο (x_1 σταθερό) η u μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο (σχ. 3.3 κάτω).

3.2. Εξίσωση του Κύματος *(συνέχεια)*

Μια γενική διαδικασία για τη λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής (3.3) είναι να θεωρήσουμε ότι η λύση αποτελείται από δύο όρους, εκ των οποίων ο ένας εξαρτάται μόνο από το χ_1 (ας θεωρήσουμε διάδοση του u_1 κατά τη διεύθυνση χ_1) και ο άλλος μόνο από το χρόνο t. Επομένως

$$u_1(x_1,t) = X(x_1)T(t) \qquad \textbf{(A.1)}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.3) προκύπτει

$$c^2 \frac{1}{X(x_1)} \frac{d^2 X(x_1)}{dx_1^{\,2}} - \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0 \qquad \textbf{(A.2)}$$

Επειδή ο όρος στα αριστερά είναι συνάρτηση μόνο του χ_1 και πρέπει να ισούται με τον όρο στα δεξιά που είναι συνάρτηση μόνο του t, κάθε ένας από τους όρους αυτούς θα ισούται με μία σταθερά, έστω $-\omega^2$. Προκύπτουν έτσι δύο συζευγμένες (coupled) διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d^2 X(x_1)}{dx_1^{\,2}} + \frac{\omega^2}{c^2} X(x_1) = 0 \;, \quad \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \qquad \textbf{(A.3)}$$

Οι διαφορικές αυτές εξισώσεις επιλύονται με συγκεκριμένους τρόπους (π.χ. με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier) ή απλώς αναγνωρίζοντας ότι έχουν τη μορφή που ικανοποιείται από απλές αρμονικές συναρτήσεις. Θέτοντας

$$X(x_1) = A_1 e^{i(\frac{\omega}{c})x_1} + A_2 e^{-i(\frac{\omega}{c})x_1} \;, \quad T(t) = B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}$$

θα έχουμε λύσεις για τις εξισώσεις (A.2).

3.2. Εξίσωση του Κύματος *(συνέχεια)*

Αυτού του είδους οι αρμονικές λύσεις, δηλαδή της μορφής

$$u(x,t) = Ae^{i\omega(\mathrm{t}\pm\frac{x}{c})} = A\cos[\omega(\mathrm{t}\pm\frac{x}{c})] + iA\sin[\omega(\mathrm{t}\pm\frac{x}{c})] \qquad \textbf{(A.4)}$$

είναι θεμελιώδους σημασίας για τη Σεισμολογία. Για συγκεκριμένη τιμή της ποσότητας ω (γωνιακή συχνότητα) οι αρμονικοί όροι έχουν περίοδο $T = 2\pi/\omega$, που είναι ο χρόνος διέλευσης δυο διαδοχικών κορυφών σε ένα συγκεκριμένο σημείο.

Αν το κύμα θεωρηθεί σαν συνάρτηση μόνο του χ, το μήκος κύματος $\lambda = c/T$, είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών.

Ο όρος $\kappa = \omega/c = 2\pi/\lambda$ είναι ο κυματάριθμος του αρμονικού κύματος.

Τα σεισμικά κύματα έχουν συχνότητες f (=1/T) μεταξύ 0,0003 Hz και 100 Hz. Θεωρώντας μια μέση ταχύτητα 5 Km/s τα μήκη κύματος είναι μεταξύ 15.000 Km και 0,05 Km.

3.3. Εξίσωση Διανυσματικού Κύματος

Στη γενική περίπτωση, η διατάραξη που διαδίδεται σε ένα μέσο υπό μορφή κύματος είναι ένα διάνυσμα με συνιστώσες και στους τρεις άξονες (x_1, x_2, x_3), δηλαδή, η μεταβαλλόμενη στο χρόνο και χώρο ποσότητα είναι διανυσματική, $u(u_1,u_2,u_3)$. Στις περιπτώσεις αυτές ισχύει για κάθε συνιστώσα του διανυσματικού μεγέθους μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u_i$$

Ας θεωρήσουμε πάλι διάδοση κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1 και ας υποθέσουμε ότι έχουμε μεταβολή των συνιστωσών u_1, u_2, u_3 μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1, δηλαδή,

$$\partial u_i / \partial x_1 \neq 0 \quad (i=1,\ 2,\ 3) \text{ και}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad \textbf{(3.7)}$$

Τότε, οι εξισώσεις του κύματος για τις συνιστώσες θα είναι:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}$$

Στην περίπτωση αυτή το κύμα είναι **επίπεδο διανυσματικό κύμα**.

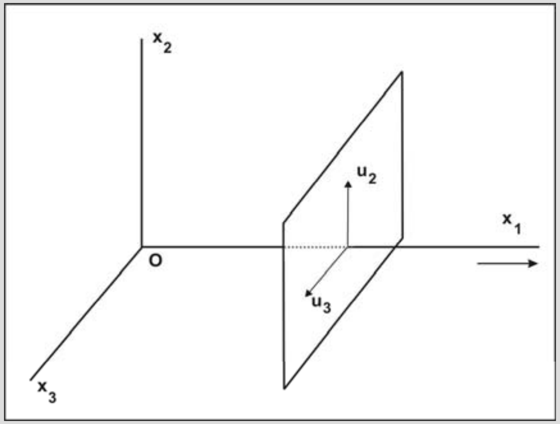
3.3. Εξίσωση Διανυσματικού Κύματος *(συνέχεια)*

Μπορεί να υπάρχει και πρόσθετος περιορισμός από αυτόν που ορίζει το επίπεδο κύμα ο οποίος έχει ως συνέπεια τη δημιουργία πολωμένου κύματος. Ένας τέτοιος περιορισμός είναι αυτός που ορίζει η σχέση:

$$\nabla.\mathrm{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Από τη σχέση αυτήν και την (3.7) προκύπτει ότι $\partial u_1/\partial x_1=0$ σε κάθε χρονική στιγμή και σε κάθε σημείο. Για το πολωμένο αυτό κύμα ισχύουν μόνο οι δύο διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}$$



Σχ. 3.4. Διάδοση πολωμένου κύματος.

Συνεπώς, μόνο οι συνιστώσες u_2 και u_3 υπάρχουν κατά τη διάδοση του πολωμένου αυτού κύματος κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1. Αυτό σημαίνει ότι η διατάραξη στην περίπτωση αυτή συμβαίνει σε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση του άξονα διάδοσης του κύματος (σχ. 3.4).

Τέτοια κύματα είναι τα εγκάρσια κύματα.

3.4. Ελαστικά Κύματα Χώρου

Η εξίσωση (3.1)

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1$$

περιγράφει πλήρως τη διάδοση διατάραξης κατά ορισμένη διεύθυνση x_1 μέσα σε απεριόριστο ελαστικό και ισότροπο μέσο.

Το δεύτερο μέλος της σχέσης αυτής αποτελείται από δύο όρους. Αυτό δείχνει ότι η εξίσωση αυτή περιγράφει τη διάδοση σύνθετης διατάραξης, που αποτελείται από δύο είδη διαδιδόμενων διαταράξεων ή αλλιώς από δύο είδη κυμάτων που λέγονται **ελαστικά κύματα χώρου**.

Τα ελαστικά κύματα του πρώτου είδους αφορούν τη διάδοση της μεταβολής του όγκου ή της πυκνότητας του μέσου διάδοσης και λέγονται **επιμήκη ελαστικά κύματα**.

Τα ελαστικά κύματα του δεύτερου είδους αφορούν τη διάδοση της εγκάρσιας παραμόρφωσης και λέγονται **εγκάρσια ελαστικά κύματα**.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα κύματα αυτά είναι και τα **μόνα κύματα** για τη διάδοση της διατάραξης σε έναν ομογενή και ελαστικό χώρο.

3.4.1. Επιμήκη Κύματα

Αν παραγωγίσουμε τη σχέση (3.1) ως προς x_1 θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1\right] \Rightarrow \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \mu \nabla^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, αν παραγωγίσουμε ως προς x_2 και x_3 τις σχέσεις (3.1) για τον άξονα x_2 και x_3, αντίστοιχα και προσθέσουμε τις τρεις εξισώσεις κατά μέλη θα προκύψει:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}\right) + \mu \nabla^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = (\lambda+\mu)\nabla^2\theta + \mu\nabla^2\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\nabla^2\theta} \qquad \textbf{(3.8)}$$

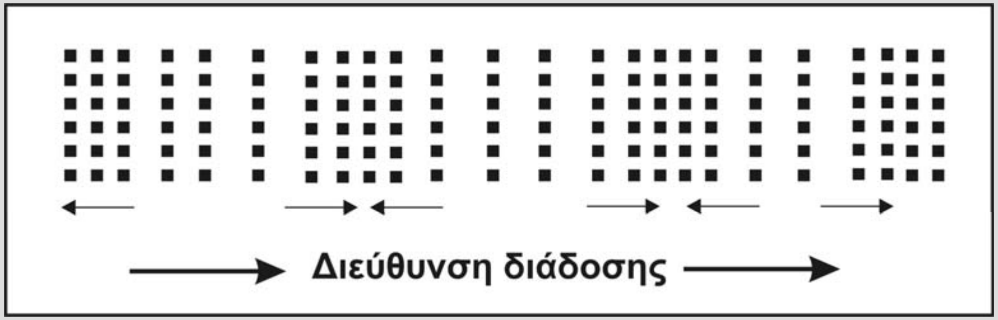
Αυτή είναι η **διαφορική εξίσωση των επιμήκων κυμάτων**.

Η ταχύτητα διάδοσης των επιμήκων κυμάτων δίνεται από τη σχέση: $\alpha = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$

3.4.1. Επιμήκη Κύματα *(συνέχεια)*

Στη Σεισμολογία, τα κύματα αυτά παριστάνονται με το σύμβολο P (Primus) επειδή τα επιμήκη κύματα, που παράγονται στην εστία μιας δόνησης, φθάνουν σε ορισμένο σεισμολογικό σταθμό και αναγράφονται πρώτα αυτά από τους σεισμογράφους, γιατί η ταχύτητα διάδοσης τους είναι μεγαλύτερη από τη ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων που παράγονται συγχρόνως με τα επιμήκη κύματα στην ίδια εστία.

Κατά τη διάδοση των επιμήκων κυμάτων μέσα σε ελαστικό μέσο, τα υλικά σημεία του μέσου ταλαντώνονται κατά διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, δηλαδή, προς τη διεύθυνση της σεισμικής ακτίνας και μάλιστα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να δημιουργούνται διαδοχικά πυκνώματα και αραιώματα (σχ. 3. 5). **Η διάδοση μέσα στη Γη των πυκνωμάτων και αραιωμάτων, δηλαδή, της μεταβολής της πυκνότητας κατά τη διεύθυνση διάδοσης της σεισμικής ενέργειας αποτελεί τα επιμήκη σεισμικά κύματα**. Η φορά ταλάντωσης των υλικών σημείων κατά τη διάδοση των επιμήκων σεισμικών κυμάτων λέγεται **συμπίεση (C)** όταν αυτή συμπίπτει με τη φορά διάδοσης του κύματος, ενώ αυτή λέγεται **αραίωση (D)** όταν είναι αντίθετη της φοράς διάδοσης του κύματος.



Σχ. 3.5. Κινήσεις των υλικών σημείων κατά τη διάδοση επιμήκους κύματος.

3.4.2. Εγκάρσια Κύματα

Αν θεωρήσουμε τη σχέση (3.1) κατά τους άξονες x_2 και x_3 και παραγωγίσουμε ως προς x_3 και x_2, αντίστοιχα, θα προκύψουν οι σχέσεις:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2 x_3}+\mu\nabla^2\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad \text{και} \quad \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2 x_3}+\mu\nabla^2\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και πολλαπλασιάζοντας με ***i*** προκύπτει:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)=\mu\nabla^2\mathbf{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2\vec{w}_1}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{w}_1$$

όπου $\mathbf{w_1}=(\nabla\times\mathbf{u_i})_1$, $\mathbf{u_i}=\mathbf{i}u_1+\mathbf{j}u_2+\mathbf{k}u_3$.

Αν κάνουμε το αντίστοιχο για τους άλλους δύο συνδυασμούς δεικτών και προσθέσουμε τότε προκύπτει:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right]=\mu\nabla^2\left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right]$$

δηλαδή

3.4.2. Εγκάρσια Κύματα *(συνέχεια)*

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{w}_i}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \vec{w}_i} \qquad \textbf{(3.9)}$$

όπου $\boldsymbol{w_i} = \nabla \times \boldsymbol{u_i}$. Η σχέση (3.9) είναι η **διαφορική εξίσωση των εγκαρσίων κυμάτων**.

Η ταχύτητα των κυμάτων αυτών δίνεται από τη σχέση:

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Κατά τη διάδοση του εγκαρσίου κύματος κατά μήκος του άξονα x_1, θα ισχύουν οι σχέσεις (3.7) καθώς και η $\partial u_1/\partial x_1 = 0$ (επειδή $\nabla . u = 0$) και η εξίσωση των εγκαρσίων κυμάτων γίνεται:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\mathbf{j}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \mathbf{k}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \mu \nabla^2 \left(-\mathbf{j}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \mathbf{k}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

Επομένως θα έχουμε ταλάντωση κάθετα στη διεύθυνση του x_1 ενός διανύσματος με συνιστώσες μόνον κατά $\boldsymbol{j}$ και $\boldsymbol{k}$.

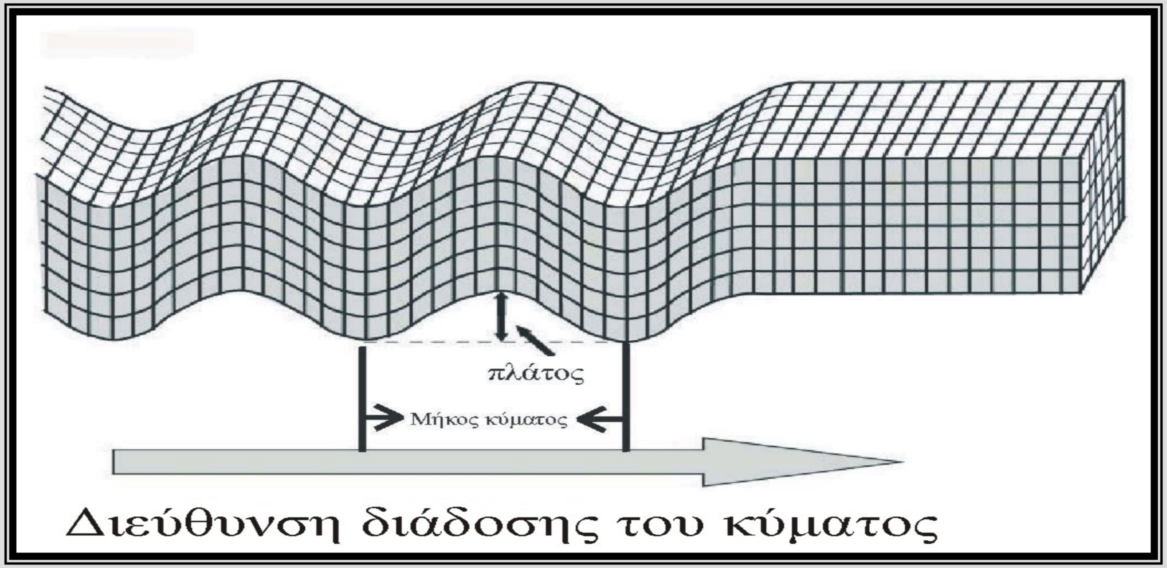
3.4.2. Εγκάρσια Κύματα *(συνέχεια)*

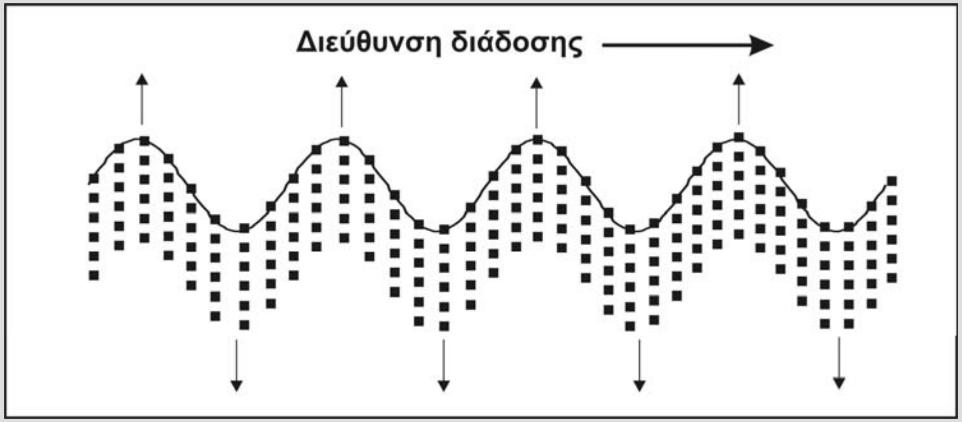
Από τη σύγκριση της σχέσης της ταχύτητας των εγκαρσίων κυμάτων με αυτήν των επιμήκων προκύπτει ότι πράγματι η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων σε ένα μέσο είναι μικρότερη από την αντίστοιχη ταχύτητα των επιμήκων κυμάτων. Γι' αυτό, τα εγκάρσια σεισμικά κύματα, που γεννιούνται στην εστία μιας δόνησης, φθάνουν και γράφονται σε τυχόντα σεισμολογικό σταθμό μετά τα επιμήκη κύματα της δόνησης και, για το λόγο αυτό, αυτά παριστάνονται με το **S (Secundus)**.

Είναι γνωστό ότι για τα ρευστά ισχύει $\mu=0$ και συνεπώς **τα εγκάρσια σεισμικά κύματα δεν διαδίδονται μέσα στα ρευστά.**

Κατά τη διάδοση των εγκαρσίων κυμάτων σε ελαστικό μέσο, τα υλικά σημεία αυτού ταλαντώνονται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και μάλιστα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το μέσο να παθαίνει μόνο διατμητική ελαστική παραμόρφωση (σχ. 3.6). **Η διάδοση αυτή της διατμητικής παραμόρφωσης μέσα στη Γη αποτελεί τα εγκάρσια σεισμικά κύματα.**

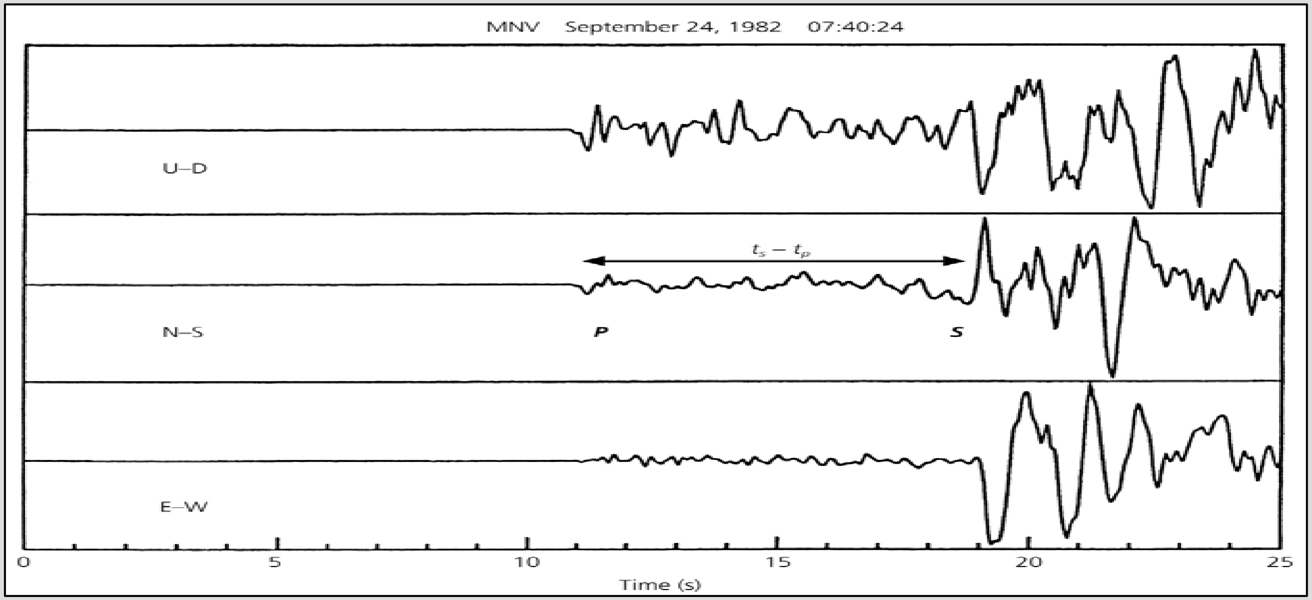
3.4.2. Εγκάρσια Κύματα *(συνέχεια)*



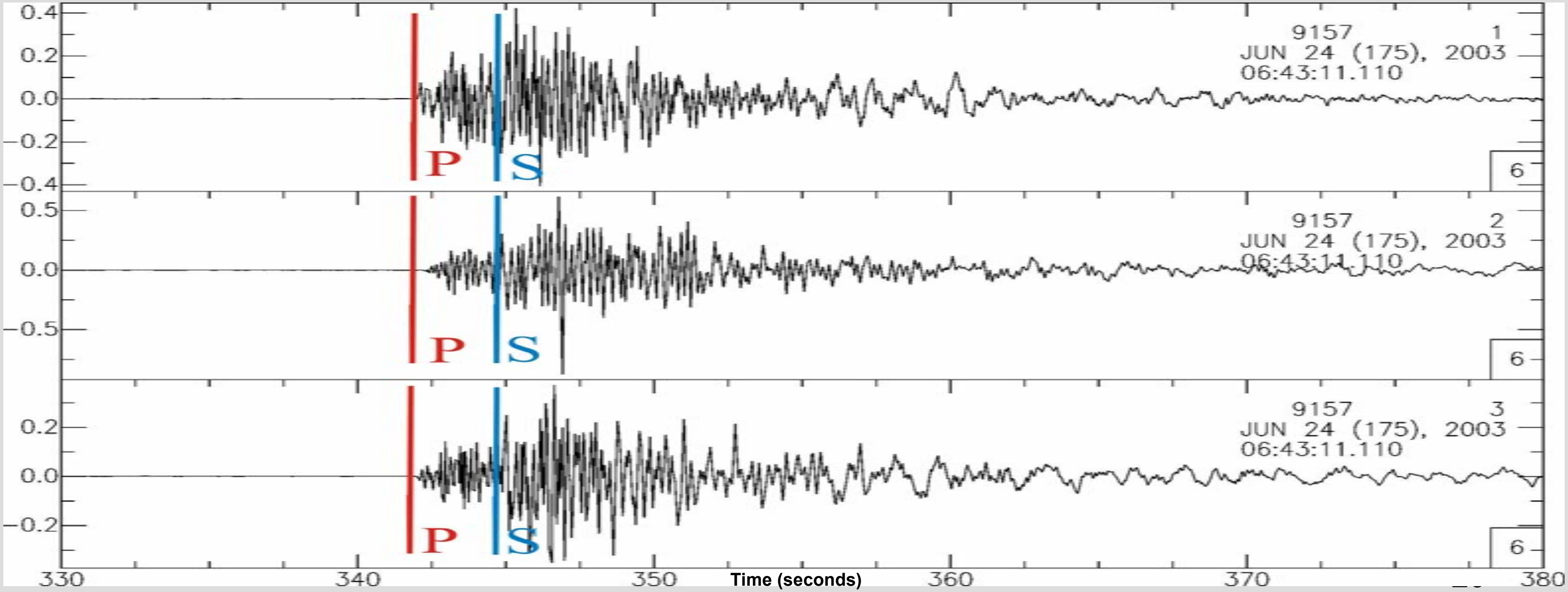


Σχ. 3.6. Κινήσεις των υλικών σημείων κατά τη διάδοση εγκάρσιου κύματος.

3.4.2. Εγκάρσια Κύματα *(συνέχεια)*



Παράδειγματα καταγραφής επιμήκων και εγκαρσίων κυμάτων.

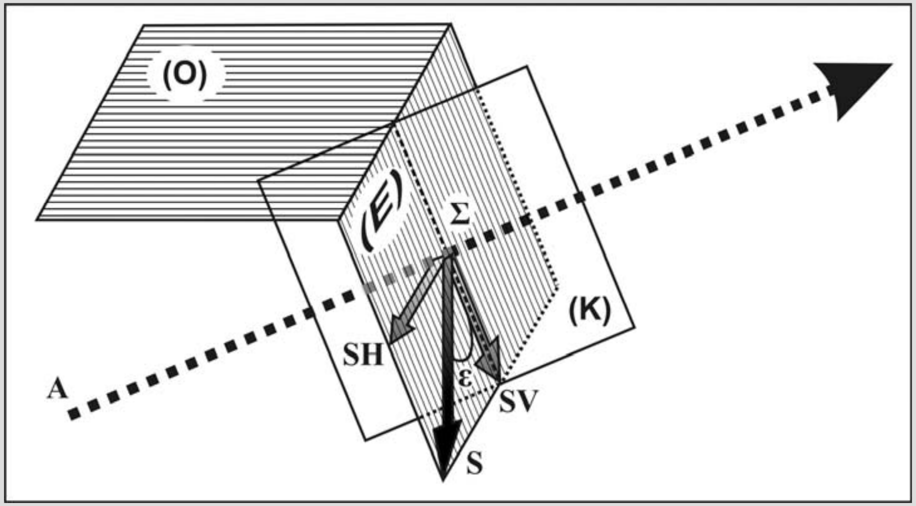


3.4.2. Εγκάρσια Κύματα *(συνέχεια)*

Το διάνυσμα της μετάθεσης, που οφείλεται στη διάδοση των εγκαρσίων κυμάτων, αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την SH και την SV.

SH : έχει τη διεύθυνση της τομής του οριζόντιου επιπέδου και του επιπέδου του κάθετου στη σεισμική ακτίνα.

SV : έχει τη διεύθυνση της τομής του κατακόρυφου επιπέδου που περιέχει τη σεισμική ακτίνα και του επιπέδου που είναι κάθετο στη σεισμική ακτίνα.



Σχ. 3.7. Ανάλυση του διανύσματος S στα SH και SV διανύσματα.

3.4.2. Εγκάρσια Κύματα (συνέχεια)

Η λύση της εξίσωσης του κύματος για συχνότητα ω είναι:

$$f(\mathbf{x},t) = Ae^{\pm i(\omega t \pm \mathbf{k.x})}$$

Η γεωμετρική επιφάνεια των σημείων στο χώρο στα οποία η ποσότητα (ωt±**k.x**) είναι σταθερή είναι το μέτωπο κύματος.

Η απλούστερη γεωμετρία ενός μετώπου κύματος είναι αυτή του επιπέδου κύματος η οποία σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση $W(x)=v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3$, όπου v_j είναι τα διευθύνοντα συνημίτονα της κάθετης στο επίπεδο του κύματος (η οποία καθορίζει και τη διεύθυνση της διάδοσης του μετώπου του κύματος).

Η λύση για επίπεδα P κύματα είναι

$$\phi(\mathbf{x},t) = Ae^{i(\omega t - \mathbf{k_a.x})}, \qquad \mathbf{k_a} = |\mathbf{k_a}|\hat{k} = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\hat{k}$$

και για τα S κύματα είναι

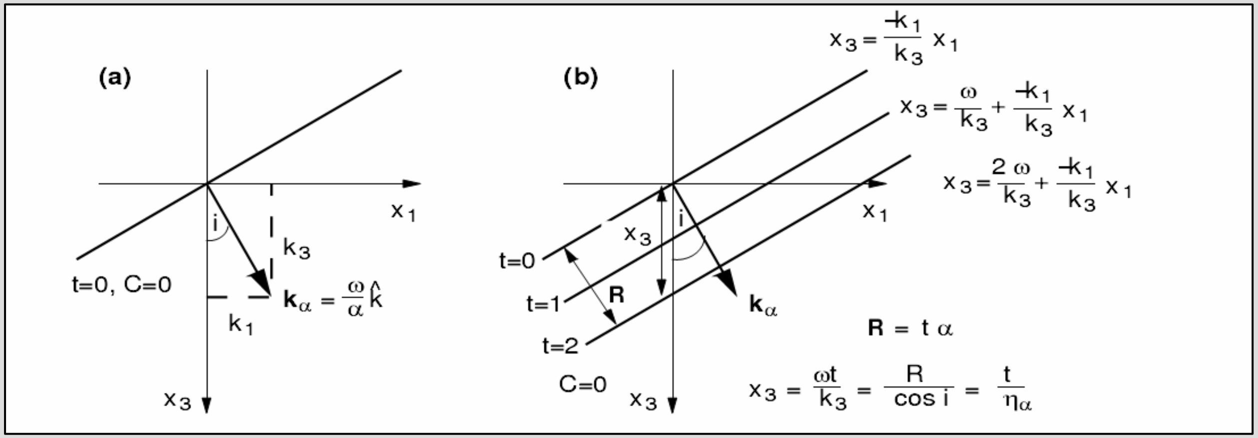
$$\vec{\psi}(\mathbf{x},t) = Be^{i(\omega t - \mathbf{k_\beta.x})}, \qquad \mathbf{k_\beta} = |\mathbf{k_\beta}|\hat{k} = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)\hat{k}$$

όπου α και β είναι οι αντίστοιχες ταχύτητες διάδοσης.

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο P κύμα με κυματικό αριθμό $\mathbf{k_\alpha}$ το οποίο διαδίδεται στο επίπεδο $\chi_1\chi_3$ (επομένως $\partial\varphi/\partial\chi_2 = 0$, $k_2=0$). Αν η φάση $(\omega t$-**k.x**$)$ είναι σταθερή τότε $\omega t - k_1\chi_1 - k_3\chi_3 = C$.

Για $t=0$ και $C=0$ θα είναι $\chi_3=-(k_1/k_3)\chi_1$, δηλαδή είναι εξίσωση ευθείας στο επίπεδο $\chi_1\chi_3$ κατά μήκος της οποίας η φάση είναι σταθερή. Αυτή η ευθεία είναι η τομή του επιπέδου του κύματος με το επίπεδο $\chi_1\chi_3$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.8α.

3.4.2. Εγκάρσια Κύματα *(συνέχεια)*



Σχ. 3.8. (α) Προβολή του μετώπου κύματος που ορίζεται από $t=0$, $C=0$ στο επίπεδο $\chi_1\chi_3$ ενός επιπέδου κύματος ($\mathbf{k}_\alpha$ είναι το διάνυσμα του κυματαρίθμου). (β) Μεταβολή της θέσης του μετώπου κύματος με σταθερή φάση ($C=0$) για διάφορους χρόνους t. (Lay and Wallace, 1995)

Το διάνυσμα $\mathbf{k}_\alpha$ (κάθετο στο επίπεδο κύματος) έχει συνιστώσες $k_1=(\omega/\alpha)sin\ i=\omega p$ και $k_3=(\omega/\alpha)cos\ i=\omega n_a$.

Η ποσότητα $p= sini/\alpha$ καλείται οριζόντια φαινόμενη ταχύτητα (horizontal slowness) ή παράμετρος της σεισμικής ακτίνας και η $n_a=cosi/\alpha$ κατακόρυφη φαινόμενη ταχύτητα (vertical slowness).

3.4.2. Εγκάρσια Κύματα *(συνέχεια)*

Στην περίπτωση που εξετάζουμε (επίπεδο κύμα το οποίο διαδίδεται κάθετα στο επίπεδο $\chi_1\chi_3$ (επομένως $\partial\varphi/\partial\chi_2 = 0$, $k_2=0$) θα ισχύει:

$$\phi = Ae^{i(\omega t - k_1 x_1 - k_3 x_3)}$$

και η μετάθεση των υλικών σημείων λόγω της διάδοσης των P κυμάτων θα είναι στο επίπεδο $\chi_1\chi_3$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{u}_p(\mathbf{x},t) = \nabla\phi = -ik_1 Ae^{i(\omega t - k_1 x_1 - k_3 x_3)}\hat{\mathbf{x}}_1 - ik_3 Ae^{i(\omega t - k_1 x_1 - k_3 x_3)}\hat{\mathbf{x}}_3$$

Ο λόγος $u_{p3}/u_{p1}=k_3/k_1=n_d/p$ ορίζει την κάθετη διεύθυνση στο μέτωπο κύματος, δηλαδή η κίνηση των υλικών σημείων είναι κάθετη στο μέτωπο κύματος (παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος).

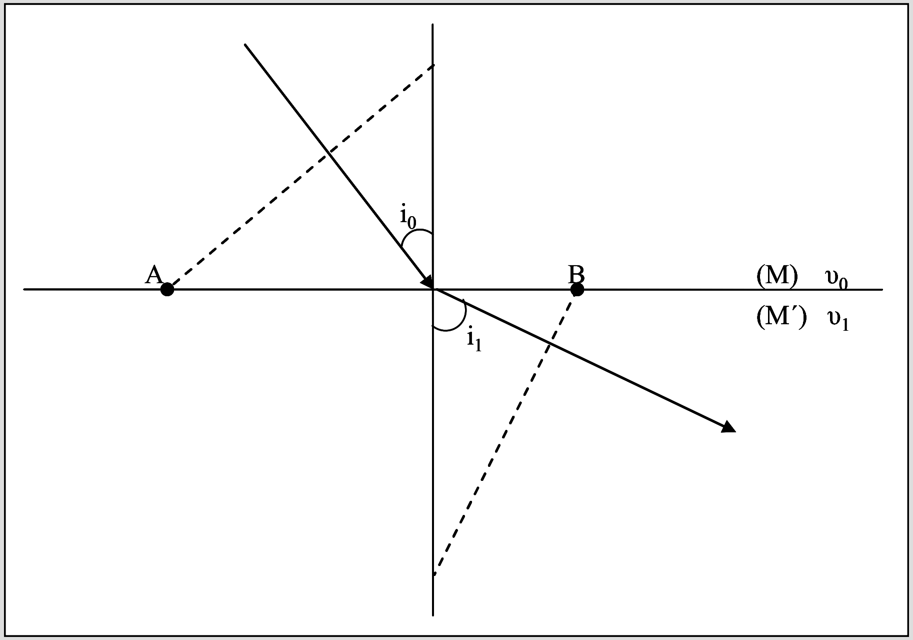
Για τα εγκάρσια κύματα, αντίστοιχα, θα ισχύει $\partial\psi_i/\partial\chi_2 = 0$ και

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x},t) = \nabla\times\vec{\psi} = u_{s_1}\hat{\mathbf{x}}_1 + u_{s_2}\hat{\mathbf{x}}_2 + u_{s_3}\hat{\mathbf{x}}_3 = \left(-\frac{\partial\psi_2}{\partial\chi_3}\right)\hat{\mathbf{x}}_1 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\chi_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial\chi_1}\right)\hat{\mathbf{x}}_2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\chi_1}\right)\hat{\mathbf{x}}_3$$

Αν ο άξονας χ_3 θεωρηθεί κατακόρυφος και το επίπεδο $\chi_1\chi_2$ η επιφάνεια της Γης, τότε οι συνιστώσες u_{s1} και u_{s3} είναι εγκάρσιες κινήσεις στο επίπεδο $\chi_1\chi_3$ και αποτελούν τη συνιστώσα SV (επειδή εμπεριέχουν κίνηση κατά τη κατακόρυφη χ_3 διεύθυνση) και η u_{s2} συνιστώσα είναι η SH συνιστώσα που αποτελείται από οριζόντιες μόνο κινήσεις.

3.5. Ανάκλαση και Διάθλαση των Κυμάτων Χώρου

Οι αρχές που διέπουν τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, όπως είναι η αρχή του Huygens, η αρχή του Fermat κλπ., διέπουν και τη διάδοση των ελαστικών κυμάτων χώρου. Όπως τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, έτσι και τα ελαστικά κύματα χώρου παθαίνουν ανάκλαση και διάθλαση, όταν προσπίπτουν στη διαχωριστική επιφάνεια δύο υλικών μέσων.



Έστω ότι δύο ομογενή υλικά μέσα Μ και Μ΄ (με ταχύτητες σεισμικών κυμάτων υ_0 και υ_1) βρίσκονται σε επαφή κατά μία επίπεδη οριζόντια επιφάνεια και μια σεισμική ακτίνα κύματος με ταχύτητα υ_0 πέφτει στη διαχωριστική επιφάνεια με γωνία i_o (με την κάθετο στην επιφάνεια).

i_o : γωνία πρόσπτωσης της σεισμικής ακτίνας.

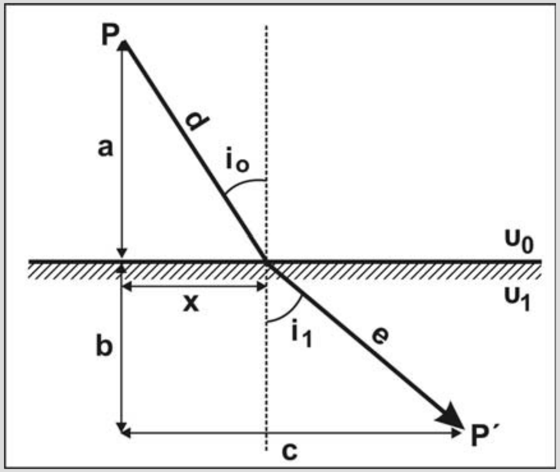
i_1 : γωνία διάθλασης της σεισμικής ακτίνας.

Η ταχύτητα με την οποία κινείται η τομή του επιπέδου του κύματος, δηλαδή του επιπέδου του κάθετου στη σεισμική ακτίνα στα δύο μέσα, με το οριζόντιο επίπεδο, (σημεία Α και Β) είναι ίση με $\upsilon_0/\eta\mu i_0$ και $\upsilon_1/\eta\mu i_1$, αντίστοιχα.

Ο γενικευμένος νόμος του Snell ορίζει ότι:

Η ταχύτητα κίνησης της τομής του επιπέδου του κύματος με τη διαχωριστική επιφάνεια είναι σταθερή:

$$\upsilon_0/\eta\mu i_0 = \upsilon_1/\eta\mu i_1 = c$$



Θεωρούμε μια ακτίνα η οποία ξεκινά από το σημείο P, που βρίσκεται σε στρώμα με ταχύτητα υ_0 και φθάνει στο σημείο P΄, το οποίο βρίσκεται σε στρώμα με ταχύτητα υ_1. Ο χρόνος διαδρομής της ακτίνας είναι:

$$T_{PP'} = \frac{d}{\upsilon_0} + \frac{e}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\upsilon_0} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{\upsilon_1}$$

Λόγω της αρχής του Fermat, η ακτίνα θα ακολουθήσει τη διαδρομή η οποία απαιτεί το μικρότερο χρόνο, δηλαδή,

$$\frac{dT}{dx} = 0 = \frac{x}{\upsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\upsilon_1\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

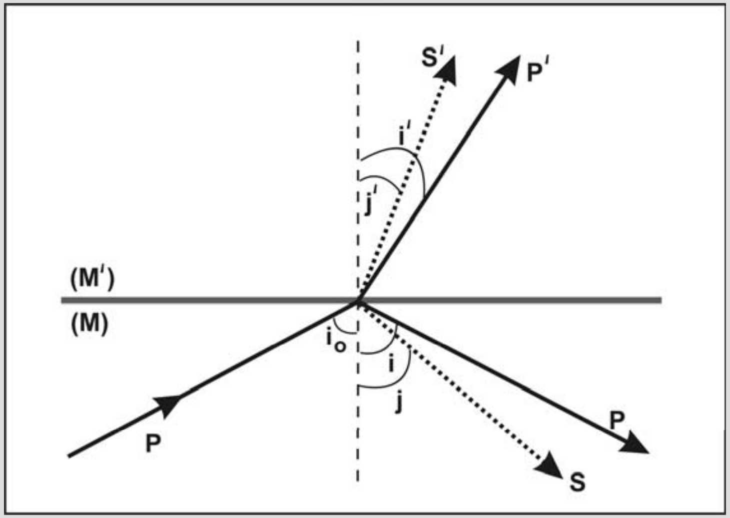
Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \eta\mu i_o\,, \qquad \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \eta\mu i_1$$

και επομένως

$$\frac{\eta\mu i_o}{\upsilon_0} = \frac{\eta\mu i_1}{\upsilon_1}$$

3.5. Ανάκλαση και Διάθλαση των Κυμάτων Χώρου *(συνέχεια)*



Σχ. 3.9. Ανάκλαση και διάθλαση κυμάτων χώρου κατά την πρόσπτωση επιμήκους κύματος στη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων.

α, α΄, είναι οι ταχύτητες των επιμήκων και β, β΄ οι ταχύτητες των εγκαρσίων κυμάτων στα μέσα (Μ) και (Μ΄), αντίστοιχα.

Στην περίπτωση, όμως, των ελαστικών κυμάτων, το φαινόμενο εμφανίζεται πολυπλοκότερο, γιατί από κύμα ενός είδους (P ή S) προκύπτουν κύματα και των δύο ειδών.

Ας θεωρήσουμε ότι επίμηκες κύμα πέφτει από το μέσο Μ στη διαχωριστική επιφάνεια. Οι ακτίνες των διαθλωμένων και των ανακλωμένων επιμήκων και εγκαρσίων κυμάτων, καθώς και οι γωνίες πρόσπτωσης αυτών παριστάνονται στο σχήμα (3.9).

Ο γενικευμένος νόμος του Snell, στην περίπτωση αυτή, δίνει:

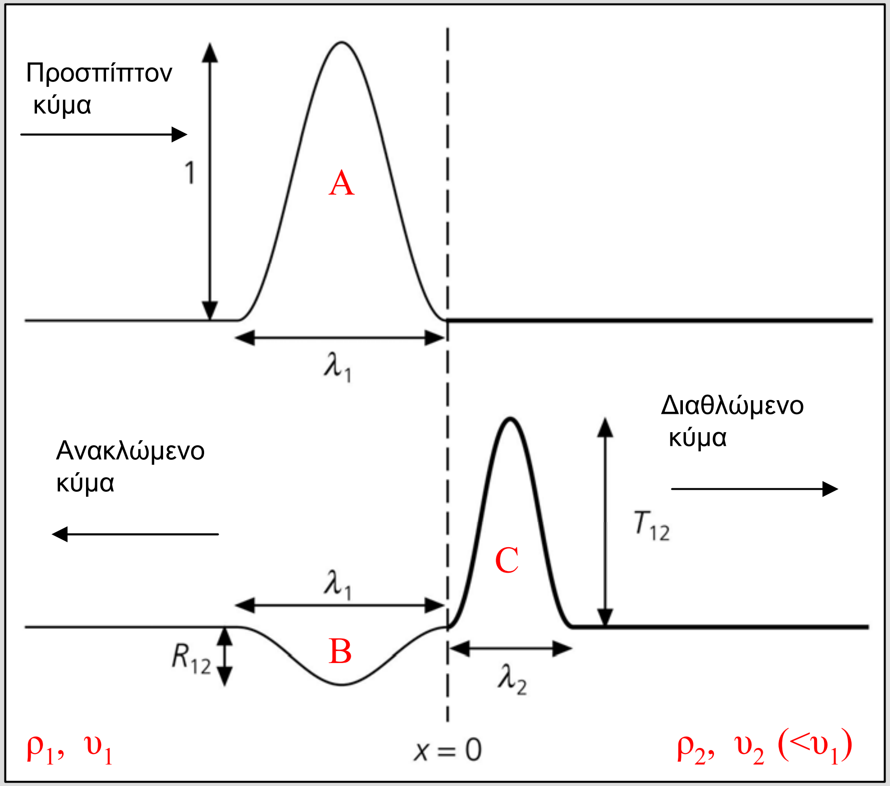
$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu i_o} = \frac{\alpha}{\eta\mu i} = \frac{\beta}{\eta\mu j} = \frac{\alpha'}{\eta\mu i'} = \frac{\beta'}{\eta\mu j'} = c} \qquad \textbf{(3.10)}$$

Κατά την πρόσπτωση επιμήκους κύματος στη διαχωριστική επιφάνεια δύο στερεών, τα ανακλώμενα και διαθλώμενα εγκάρσια κύματα είναι SV κύματα.

Όταν πέσει εγκάρσιο κύμα SV, τα ανακλώμενα και διαθλώμενα κύματα είναι επιμήκη κύματα και κύματα SV.

Όταν το κύμα που πέφτει είναι εγκάρσιο κύμα SH, γεννιούνται μόνο SH ανακλώμενα και διαθλώμενα κύματα.

3.5. Ανάκλαση και Διάθλαση των Κυμάτων Χώρου (συνέχεια)



Απλό αρμονικό κύμα προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων.

Ακουστική Αγωγιμότητα: $\rho\upsilon$

Συντελεστής Ανάκλασης: R_{12}

$$R_{12} = \frac{B}{A} = \frac{\rho_1\upsilon_1 - \rho_2\upsilon_2}{\rho_1\upsilon_1 + \rho_2\upsilon_2}$$

Συντελεστής Διάδοσης: T_{12}

$$T_{12} = \frac{C}{A} = \frac{2\rho_1\upsilon_1}{\rho_1\upsilon_1 + \rho_2\upsilon_2}$$

$$u_1(x,t) = Ae^{i(\omega t\text{-}k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)} \qquad u_2(x,t) = Ce^{i(\omega t\text{-}k_1 x)}$$

$$R_{12} = \text{-}R_{21}\,, \quad T_{12} + T_{21} = 2$$

$$\omega = \upsilon_1 k_1 = \upsilon_2 k_2 = \upsilon_1 2\pi/\lambda_1 = \upsilon_2 2\pi/\lambda_2$$

Το ανακλώμενο κύμα είναι αντεστραμμένο επειδή η ακουστική αγωγιμότητα του δεύτερου μέσου είναι μεγαλύτερη.

Το διαθλώμενο κύμα έχει μικρότερο μήκος λ_2 επειδή η ταχύτητα διάδοσης είναι μικρότερη στο δεύτερο μέσο.

3.6. Επιφανειακά Κύματα

Οποιαδήποτε διατάραξη σε ελαστικό και ισότροπο απεριόριστο μέσο δημιουργεί μόνο κύματα χώρου, δηλαδή επιμήκη και εγκάρσια.

Επειδή, όμως,

1. η στερεά Γη έχει περιορισμένες διαστάσεις και η επιφάνειά της τη χωρίζει από την ατμόσφαιρα, που έχει πολύ διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες
2. τα επιφανειακά στρώματά της δε μπορεί να θεωρηθούν απολύτως ισότροπα

παράγονται και αναγράφονται από τους σεισμογράφους και κύματα τα οποία κατά τη διάδοσή τους ακολουθούν την επιφάνεια της Γης, δηλαδή **τα πλάτη των κυμάτων αυτών είναι μεγάλα κοντά στην επιφάνεια της Γης και ελαττώνονται έντονα όσο αυξάνεται το βάθος μέσα στη Γη.**

Τα κύματα αυτά λέγονται **επιφανειακά κύματα** και διακρίνονται σε δύο κύριες κατηγορίες:

•στα **κύματα Rayleigh**

•στα **κύματα Love**

3.6.1. Κύματα Rayleigh

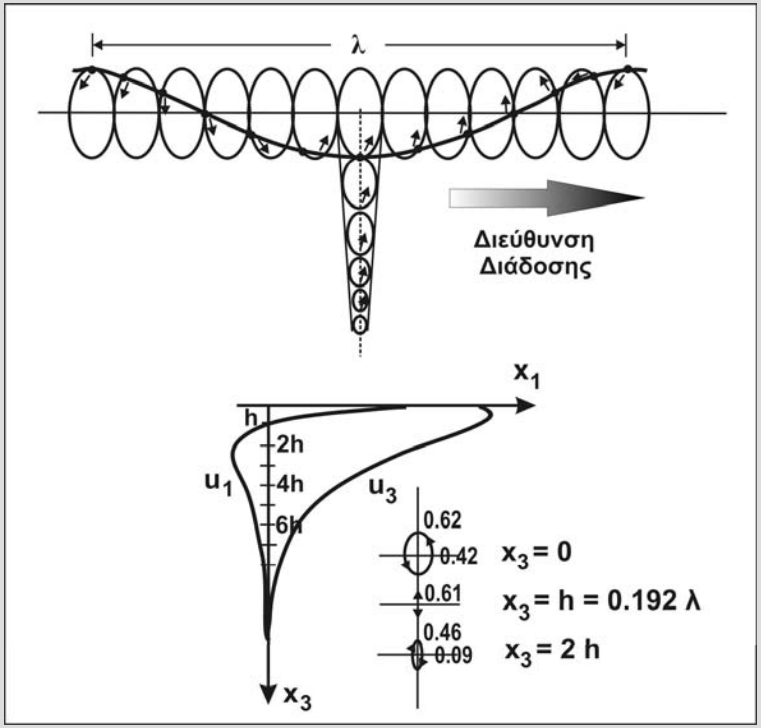
Ας θεωρήσουμε ομογενές και ισότροπο ελαστικό μέσο, που χωρίζεται από το κενό με το οριζόντιο επίπεδο Ox_1x_2. Με κατάλληλη διέγερση είναι δυνατό να παραχθούν ελαστικά κύματα που διαδίδονται κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 και έχουν τις εξής ιδιότητες:

α) είναι επιφανειακά κύματα, δηλαδή τα πλάτη των κινήσεων των υλικών σημείων ελαττώνονται γρήγορα στο μέσο M όσο αυξάνεται η απόσταση από την επιφάνεια Ox_1x_2 και

β) σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή οι μεταθέσεις των υλικών σημείων τα οποία βρίσκονται σε ευθείες παράλληλες του άξονα Ox_2 είναι ίσες.

Τα κύματα αυτά λέγονται **κύματα Rayleigh**.

3.6.1. Κύματα Rayleigh *(συνέχεια)*



Σχ. 3.10. Μεταβολή του πλάτους και της φοράς ταλάντωσης των υλικών σημείων με το βάθος κατά τη διάδοση θεμελιώδους κύματος Rayleigh (Sheriff and Geldart, 1982).

Από τη δεύτερη των παραπάνω ιδιοτήτων προκύπτει, ότι είναι $u_2=0$, δηλαδή, τα υλικά σημεία του άξονα Ox_1 κάνουν ταλαντώσεις μόνο στο επίπεδο Ox_1x_3.

Επειδή οι μεταθέσεις u_1 και u_3 παρουσιάζουν διαφορά φάσης, τα υλικά σημεία διαγράφουν ελλείψεις που βρίσκονται στο επίπεδο Ox_1x_3 (σχ. 3.10).

Κοντά στην επιφάνεια,

ο μεγάλος άξονας κάθε έλλειψης είναι παράλληλος προς τον κατακόρυφο άξονα Ox_3,

ο μικρός είναι παράλληλος προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος

και η φορά της κίνησης κάθε υλικού σημείου της έλλειψης είναι **ανάστροφη**, δηλαδή, η φορά κίνησης στο κατώτερο σημείο της τροχιάς συμπίπτει με τη φορά διάδοσης του κύματος.

Τα πλάτη των κυμάτων Rayleigh, και συνεπώς το μέγεθος των τροχιών των υλικών σημείων, ελαττώνονται όσο απομακρυνόμαστε από την ελεύθερη επιφάνεια.

Σε βάθος ίσο με το μήκος κύματος, λ, τα πλάτη σχεδόν μηδενίζονται. Η φορά κίνησης των υλικών σημείων είναι ανάστροφη μέχρι το βάθος $x_3=0.192\lambda$. Κάτω από το βάθος αυτό η φορά κίνησης των υλικών σημείων αντιστρέφεται.

3.6.1. Κύματα Rayleigh *(συνέχεια)*

Αν α, β είναι οι ταχύτητες διάδοσης των επιμήκων και εγκαρσίων κυμάτων μέσα σε ομογενές και ισότροπο ημιχώρο, η ταχύτητα διάδοσης c των κυμάτων Rayleigh αποτελεί λύση της εξίσωσης:

$$\boxed{\frac{c^6}{\beta^6} - 8\frac{c^4}{\beta^4} + c^2\left(\frac{24}{\beta^2} - \frac{16}{\alpha^2}\right) - 16\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = 0} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Για $c=0$ και $c=\beta$, η συνάρτηση παίρνει ετερόσημες τιμές. Άρα υπάρχει μία λύση αυτής μεταξύ 0 και β.

Οι πράξεις απλοποιούνται, όταν ισχύει η **σχέση Poisson**:

$\lambda=\mu$ (ή $\sigma=1/4$ και $\alpha=\beta\sqrt{3}$)

(Η σχέση αυτή αποτελεί, για πολλά προβλήματα, ικανοποιητική προσέγγιση της πραγματικής σχέσης που ισχύει για τα πετρώματα της Γης).

Οταν ισχύει η σχέση Poisson, η εξίσωση (3.11) έχει λύσεις που δίνονται από τις σχέσεις

$c^2/\beta^2=4$, $c^2/\beta^2=2+2/\sqrt{3}$, $c^2/\beta^2=2-2/\sqrt{3}$.

Απ' αυτές οι δύο πρώτες δεν είναι παραδεκτές, γιατί δεν ικανοποιούν τη συνθήκη $0<c<\beta$. Η τελευταία από τις τρεις δίνει:

$$c = 0.919\beta$$

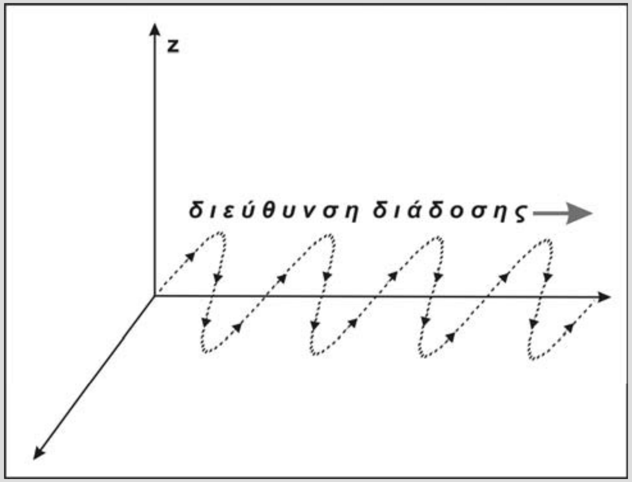
3.6.1. Κύματα Rayleigh *(συνέχεια)*

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, κατά τη διάδοση των κυμάτων Rayleigh στο επιφανειακό μέρος ομογενούς και ισότροπου ημιχώρου, η ταχύτητα αυτών είναι ανεξάρτητη του κυματικού αριθμού, κ, και συνεπώς ανεξάρτητη του μήκους κύματος, λ, της περιόδου, T, και της συχνότητας, f.

Παρατηρήθηκε, όμως, ότι η ταχύτητα των κυμάτων Rayleigh που διαδίδονται στα επιφανειακά στρώματα της Γης μεταβάλλεται με την περίοδο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο χώρος όπου διαδίδονται τα κύματα αυτά δεν είναι ομογενής.

Το φαινόμενο κατά το οποίο η ταχύτητα κύματος εξαρτάται από την περίοδο λέγεται σκέδαση. Συνεπώς, τα κύματα Rayleigh που διαδίδονται στα επιφανειακά στρώματα της Γης σκεδάζονται.

3.6.2. Κύματα Love



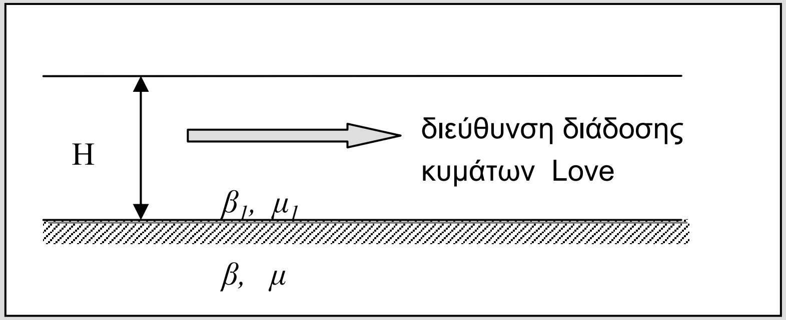
Σχ. 3.11. Τα υλικά σημεία κινούνται οριζόντια κατά τη διάδοση των θεμελιωδών κυμάτων Love.

Κύματα Love

Επιφανειακά κύματα, κατά τη διάδοση των οποίων τα υλικά σημεία πραγματοποιούν οριζόντιες ταλαντώσεις, κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων.

Τα κύματα αυτά είναι γραμμικώς πολωμένα εγκάρσια κύματα που έχουν μόνο τη συνιστώσα SH.

Για τη γένεση των κυμάτων Love, είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός στρώματος ορισμένου πάχους που βρίσκεται πάνω σε ημιχώρο. Αυτά αποτελούν διατάραξη που διαδίδεται μέσα στο στρώμα και είναι αποτέλεσμα εποικοδομητικής συμβολής κυμάτων SH, τα οποία παθαίνουν διαδοχικές ανακλάσεις στις δύο ορικές οριζόντιες επιφάνειες του στρώματος.



Έστω οριζόντιο στρώμα ομογενούς και ισότροπου ελαστικού υλικού, πάχους H, στο οποίο η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων είναι β_1 και η σταθερά του Lamé είναι μ_1, το οποίο βρίσκεται πάνω σε ομογενή και ισότροπο ελαστικό ημιχώρο, όπου η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων είναι β και η αντίστοιχη σταθερά του Lamé μ.

Η ταχύτητα διάδοσης, c, των κυμάτων Love, κατά την οριζόντια διεύθυνση, αποτελεί λύση της εξίσωσης:

$$\boxed{\mu\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta^2}}-\mu_1\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}\cdot \varepsilon\phi\left(\kappa H\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}\right)=0} \qquad \textbf{(3.12)}$$

όπου $\beta_1<c<\beta$.

3.6.2. Κύματα Love *(συνέχεια)*

Η (3.12) λέγεται εξίσωση της περιόδου και δείχνει ότι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων Love δεν εξαρτάται μόνο από τις φυσικές ιδιότητες του στρώματος και του ημιχώρου αλλά και από τον κυματικό αριθμό, κ, ή την περίοδο, T $(\kappa=2\pi/cT)$. **Συνεπώς, τα κύματα Love σκεδάζονται, δηλαδή, η ταχύτητά τους εξαρτάται από την περίοδο.**

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι τριγωνομετρική εξίσωση, αν ως άγνωστο θεωρήσουμε την ποσότητα κsH, όπου

$$s = \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}$$

Αν η $\kappa sH=\varphi$ είναι μια μερική λύση της εξίσωσης, όπου $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, τότε και η $\kappa sH = \varphi + n\pi$, όπου n ακέραιος αριθμός, είναι επίσης λύση.

Επομένως υπάρχει σειρά κυμάτων διαφόρων κυματικών αριθμών, που έχουν την ίδια ταχύτητα.

Το κύμα που προκύπτει για $n=0$ αντιστοιχεί στη *θεμελιώδη ταλάντωση*, για $n=1$ στην *πρώτη αρμονική*, για $n=2$ στη *δεύτερη αρμονική*, κλπ.

Για τις αρμονικές υπάρχουν μέσα στο στρώμα επίπεδα παράλληλα της ελεύθερης επιφάνειας, στα οποία οι μεταθέσεις των υλικών σημείων είναι ίσες με μηδέν κατά τη διάδοση των κυμάτων Love. Για το θεμελιώδες κύμα δεν υπάρχει τέτοιο επίπεδο, για το πρώτο αρμονικό υπάρχει ένα τέτοιο επίπεδο, για το δεύτερο αρμονικό δύο, κλπ.

3.6.2. Κύματα Love *(συνέχεια)*

Από την εξίσωση (3.12) προκύπτει ότι:

Όταν το κ (ή η συχνότητα) παίρνει μικρές τιμές, τότε η περίοδος (ή το μήκος κύματος) παίρνει μεγάλες τιμές και η ταχύτητα, c, των κυμάτων Love τείνει στην ταχύτητα, β, των εγκαρσίων κυμάτων μέσα στον ημιχώρο.

Όταν το κ παίρνει μεγάλες τιμές, οπότε η περίοδος παίρνει μικρές τιμές, η ταχύτητα, c, τείνει στην ταχύτητα, β_1, των εγκαρσίων κυμάτων μέσα στο στρώμα.

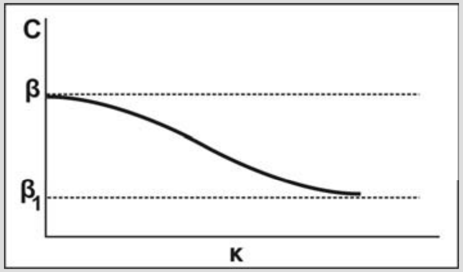
Αυτό σημαίνει, ότι η ταχύτητα των μικρής περιόδου κυμάτων ορισμένου αρμονικού καθορίζεται, κυρίως, από τις φυσικές ιδιότητες των επιφανειακών στρωμάτων της Γης, ενώ η ταχύτητα των μεγάλης περιόδου κυμάτων του ίδιου αρμονικού καθορίζεται, κυρίως, από τις ιδιότητες των βαθύτερων στρωμάτων.

Από τη σχέση (3.12) προκύπτει ότι: $\varepsilon\varphi(\kappa HS) = \dfrac{\mu\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta^2}}}{\mu_1\sqrt{\dfrac{c^2}{\beta_1^2}-1}}$ **(1).** Θεωρούμε τη θεμελιώδη ταλάντωση $0 \le \kappa HS \le \pi/2$:

α) Για $\kappa HS = 0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\phi = 0 \Rightarrow \dfrac{\mu\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta^2}}}{\mu_1\sqrt{\dfrac{c^2}{\beta_1^2}-1}} = 0 \Rightarrow c = \beta$

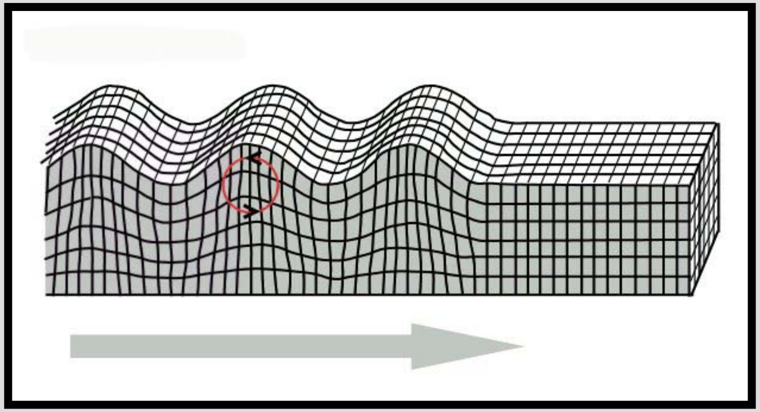
Επίσης αν $\kappa HS=0$ τότε $\kappa=0$, αφού H και S είναι διάφορα του μηδενός. Ο κυματικός αριθμός $\kappa=2\pi/cT$ τείνει στο μηδέν όταν η περίοδος T τείνει στο άπειρο. Επομένως, όταν η περίοδος T των κυμάτων Love παίρνει μεγάλες τιμές, η ταχύτητα διάδοσής τους τείνει στην ταχύτητα β των εγκαρσίων κυμάτων μέσα στον ημιχώρο.

β) Αντίστοιχα, όταν η ποσότητα κHS τείνει στο $\pi/2$, η $\varepsilon\varphi(\kappa HS)$ τείνει στο άπειρο και ο παρονομαστής του δεύτερου σκέλους της σχέσης (1) τείνει στο μηδέν, επομένως η ταχύτητα c τείνει στην ταχύτητα $\beta 1$ των εγκαρσίων κυμάτων στο στρώμα που διαδίδονται τα κύματα Love. Στην περίπτωση αυτή η $\kappa=\pi/2HS$ τείνει στο άπειρο επειδή η ποσότητα S τείνει στο μηδέν και επομένως η περίοδος T τείνει στο μηδέν.

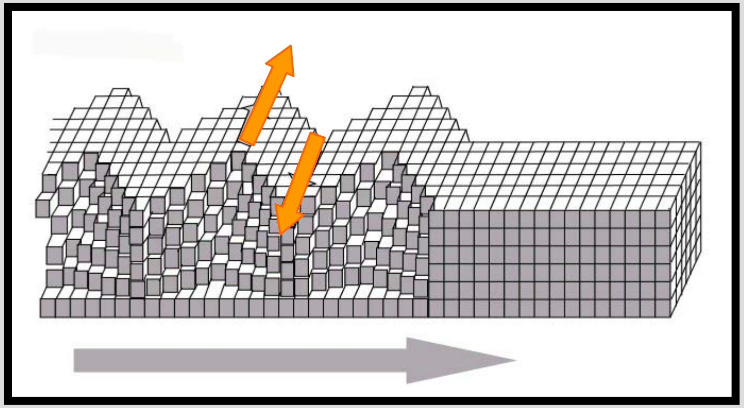


Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας c σε συνάρτηση με τον κυματικό αριθμό κ.

3.6.2. Κύματα Love και Rayleigh *(συνέχεια)*



Κίνηση των υλικών σημείων κατά τη διάδοση των κυμάτων Rayleigh. Προέρχονται από τη συμβολή P και SV κυμάτων και κ*αταγράφονται σε κατακόρυφα και οριζόντια σεισμόμετρα* ***πάντα τελευταία.***



Κίνηση των υλικών σημείων κατά τη διάδοση των κυμάτων Love. Προέρχονται από τη συμβολή SH κυμάτων, προκαλούν μόνο εγκάρσια κίνηση και επομένως καταγράφονται μόνο από τα οριζόντια σεισμόμετρα

3.6.3. Σκέδαση Επιφανειακών Κυμάτων

<u>Σκέδαση</u> ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται από την περίοδο, Τ, του κύματος (ή από τη συχνότητα f ή τον κυματικό αριθμό κ).

Κύματα Love: Παθαίνουν σκέδαση κατά τη διάδοσή τους στα επιφανειακά στρώματα της Γης αφού όπως προκύπτει από τη σχέση (3.12), η ταχύτητα διάδοσης, c, των κυμάτων Love εξαρτάται από τον κυματικό αριθμό κ.

Κύματα Rayleigh: Οταν διαδίδονται σε ομογενή ημιχώρο **δεν** σκεδάζονται αλλά, επειδή τα επιφανειακά στρώματα της Γης είναι ανομοιογενή, τα κύματα Rayleigh που διαδίδονται στα επιφανειακά στρώματα της Γης σκεδάζονται.

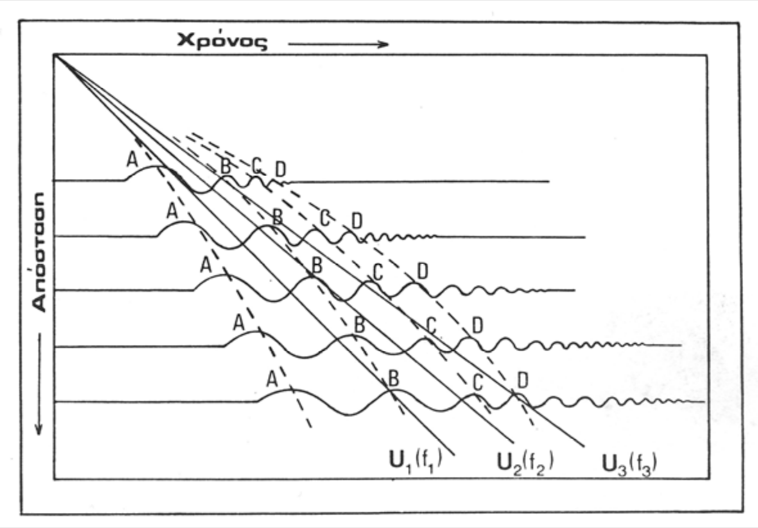
Κανονική σκέδαση: Η ταχύτητα των κυμάτων αυξάνεται όταν αυξάνεται η περίοδός τους.

Ανάστροφη σκέδαση: Η ταχύτητα των κυμάτων ελαττώνεται όσο αυξάνεται η περίοδός τους.

3.6.3. Σκέδαση Επιφανειακών Κυμάτων *(συνέχεια)*

Η συνολική διάρκεια των επιφανειακών κυμάτων είναι μικρή κοντά στην εστία τους και συνεχώς αυξάνεται όσο αυξάνει η απόσταση από την εστία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα κύματα αναπτύσσονται κατά τη διάδοσή τους, επειδή τα μεγάλης περιόδου κύματα, κατά την κανονική σκέδαση, διαδίδονται γρηγορότερα από τα μικρής περιόδου κύματα, τα οποία καθυστερούν.

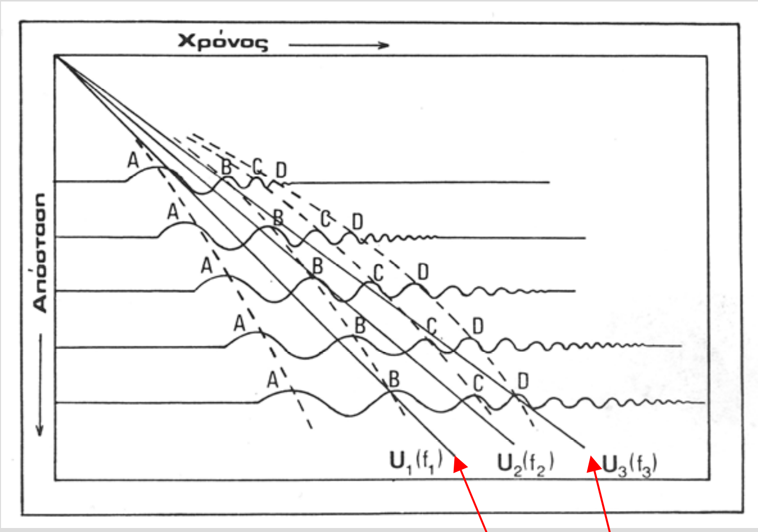
Έτσι, κατά την κανονική σκέδαση, πρώτα φθάνουν σ' ένα σταθμό τα μεγάλης περιόδου κύματα και όσο περνάει ο χρόνος φθάνουν συνεχώς όλο και μικρότερης περιόδου κύματα.



Σχ. 3.12. Μορφές σκεδασμένου κύματος σε συνάρτηση με το χρόνο, σε πέντε αποστάσεις από την εστία του (Officer, 1958). Παρατηρούμε στο σχήμα αυτό, ότι τα κύματα αναπτύσσονται με την απόσταση και ότι η περίοδος ελαττώνεται με το χρόνο, επειδή πρόκειται για κανονική σκέδαση.

3.6.3. Σκέδαση Επιφανειακών Κυμάτων *(συνέχεια)*

Κάθε μία από τις τρεις ευθείες γραμμές στο σχήμα (3.12) ενώνει σημεία των πέντε σεισμογραμμάτων τα οποία αντιστοιχούν στην ίδια ομάδα κύματος η οποία έχει ορισμένη ταχύτητα ομάδας (π.χ. U_1) και αντιστοιχεί σε ορισμένη περίοδο (π.χ. T_1). Η κλίση κάθε ευθείας είναι η αντίστοιχη ταχύτητα ομάδας, δηλαδή $U_1=\Delta/t$ όπου Δ είναι η απόσταση από την εστία των κυμάτων και t είναι ο χρόνος κατά τον οποίο η ομάδα αυτή των κυμάτων διέτρεξε την απόσταση αυτή.



Παρατηρούμε, ότι η κλίση των ευθειών αυτών, δηλαδή, η ταχύτητα ομάδας, ελαττώνεται όσο ελαττώνεται η περίοδος. Αυτό σημαίνει ότι η σκέδαση είναι κανονική.

$$U_1 > U_3, \quad T_1 > T_2$$

3.6.3. Σκέδαση Επιφανειακών Κυμάτων *(συνέχεια)*

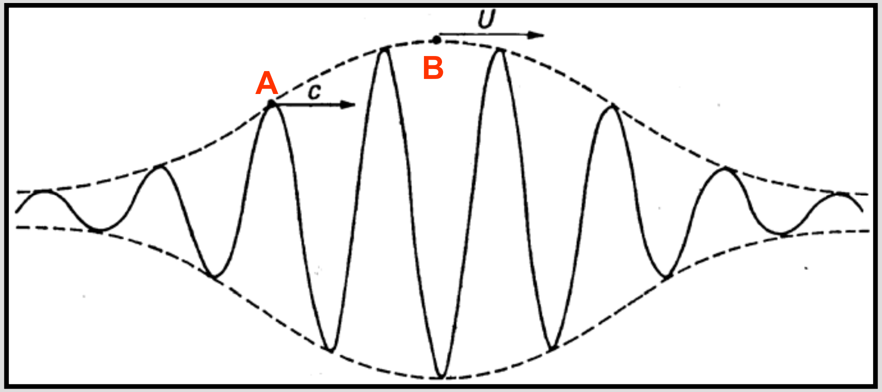
Κάθε μία από τις τέσσερις στιγμένες καμπύλες στο σχήμα (3.12) ενώνει σημεία που βρίσκονται σε φάση (π.χ. τα σημεία Α). Η περίοδος που αντιστοιχεί στη φάση αυτή δεν είναι η ίδια για τα πέντε εγγραφήματα.

Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται μία ορισμένη φάση δεν είναι σταθερή (οι στιγμένες καμπύλες δεν είναι ευθείες). Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα φάσης, c, πρέπει να διαιρέσουμε τη διαφορά αποστάσεων μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων (σταθμών) με την αντίστοιχη διαφορά χρόνων, δηλαδή $c=\delta\Delta/\delta t$, όπου $\delta\Delta$ είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σταθμών που διέτρεξε το κύμα και δt είναι ο χρόνος κατά τον οποίο διέτρεξε το κύμα την απόσταση αυτή.

3.6.3. Σκέδαση Επιφανειακών Κυμάτων *(συνέχεια)*

Η ταχύτητα, c, με την οποία διαδίδεται ένα απλό αρμονικό κύμα, λέγεται **ταχύτητα φάσης** και, όπως είδαμε παραπάνω, αυτή εξαρτάται από την περίοδο, όταν το κύμα διαδίδεται μέσα σε ένα υλικό μέσο που προκαλεί σκέδαση.

Μία διατάραξη που προκαλείται σε σημείο υλικού μέσου, μπορεί να θεωρηθεί αποτελούμενη από πολλές αρμονικές διαταράξεις συνεχούς φάσματος συχνοτήτων. Οι απλές διαταράξεις που έχουν περιόδους κοντά σε ορισμένη περίοδο, συμβάλλουν μεταξύ τους κατά τη διάδοσή τους στο μέσο που προκαλεί σκέδαση και δημιουργούν διαμορφωμένο κύμα το οποίο διαδίδεται με ορισμένη ταχύτητα, U, που λέγεται **ταχύτητα ομάδας**.



Το σημείο Α το οποίο είναι η κορυφή του συγκεκριμένου αρμονικού κύματος διαδίδεται με ταχύτητα c, ενώ το σημείο Β το οποίο είναι η κορυφή της ομάδας των κυμάτων διαδίδεται με ταχύτητα U.

3.6.3. Σκέδαση Επιφανειακών Κυμάτων *(συνέχεια)*

Ας θεωρήσουμε ομάδα αρμονικών κυμάτων, που έχουν κυκλικές συχνότητες μεταξύ ω-ε και $\omega+\varepsilon$ και έστω ότι c είναι η ταχύτητα φάσης του κύματος που έχει κυκλική συχνότητα ω. Η ταχύτητα φάσης δίνεται από τη σχέση $c=\omega/\kappa$, όπου κ ο κυματικός αριθμός. Αποδεικνύεται, ότι η ταχύτητα ομάδας δίνεται από τη σχέση $U=d\omega/d\kappa$.

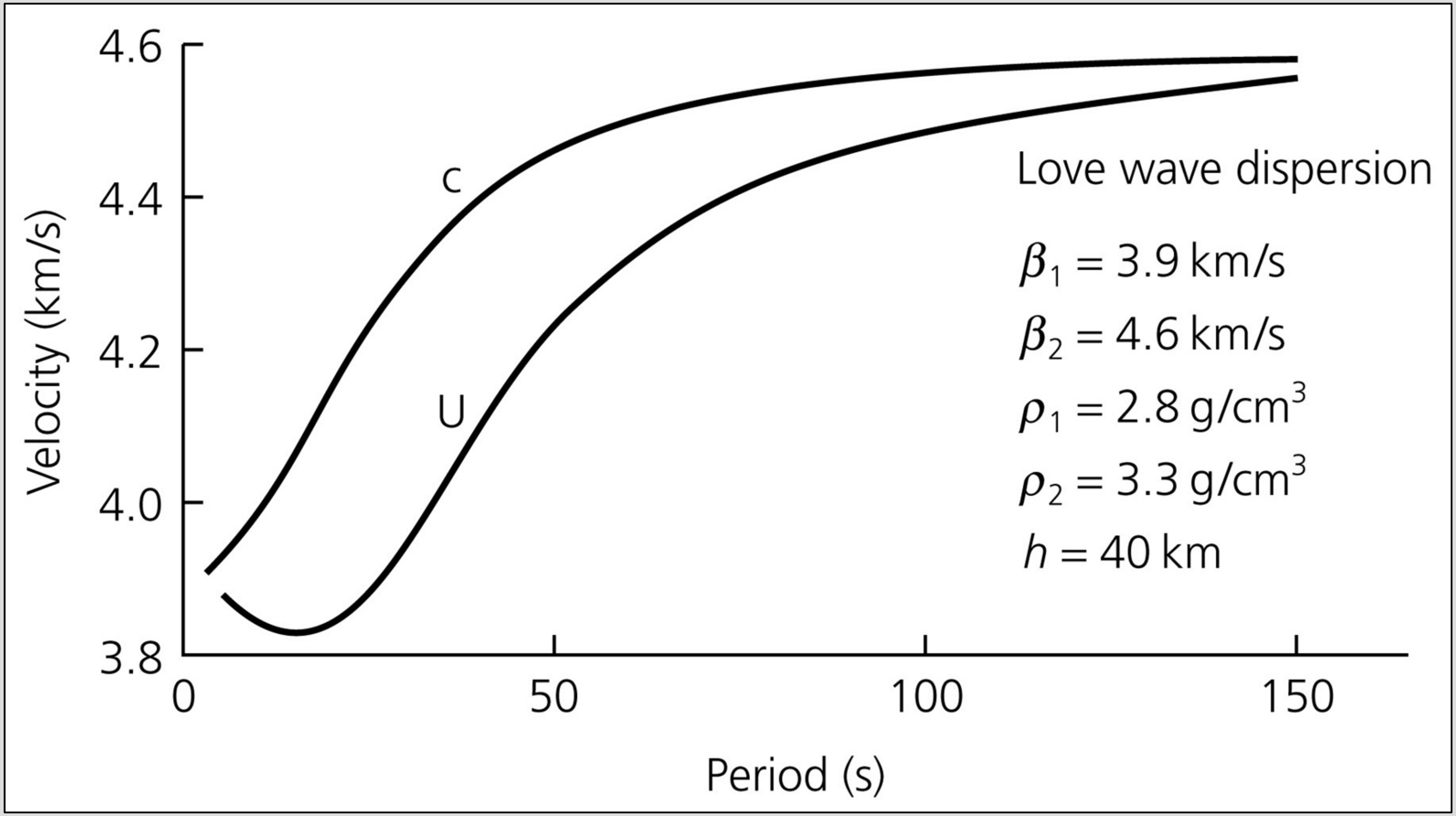
Κάνοντας τις πράξεις

$$U=\frac{d\omega}{d\kappa}=\frac{d(c\kappa)}{d\kappa}=c+\kappa\frac{dc}{d\kappa}=c+\frac{2\pi}{cT}\frac{dc}{d\frac{2\pi}{\mathrm{T}c}}=c-\frac{dc}{cT\frac{Tdc+cdT}{\mathrm{T}^2c^2}}=c-\frac{cT}{c\frac{dT}{dc}+T}$$

καταλήγουμε ότι η ταχύτητα ομάδας δίνεται σε συνάρτηση με την ταχύτητα φάσης και την αντίστοιχη περίοδο από τη σχέση:

$$\boxed{U=c-\frac{cT}{c\frac{dT}{dc}+T}}$$

3.6.3. Σκέδαση Επιφανειακών Κυμάτων *(συνέχεια)*



Ταχύτητα φάσης c και ταχύτητα ομάδας U, για τα κύματα Love (θεμελιώδης ταλάντωση) σε φλοιό πάχους 40 Km (Stein and Wysession, 2003)