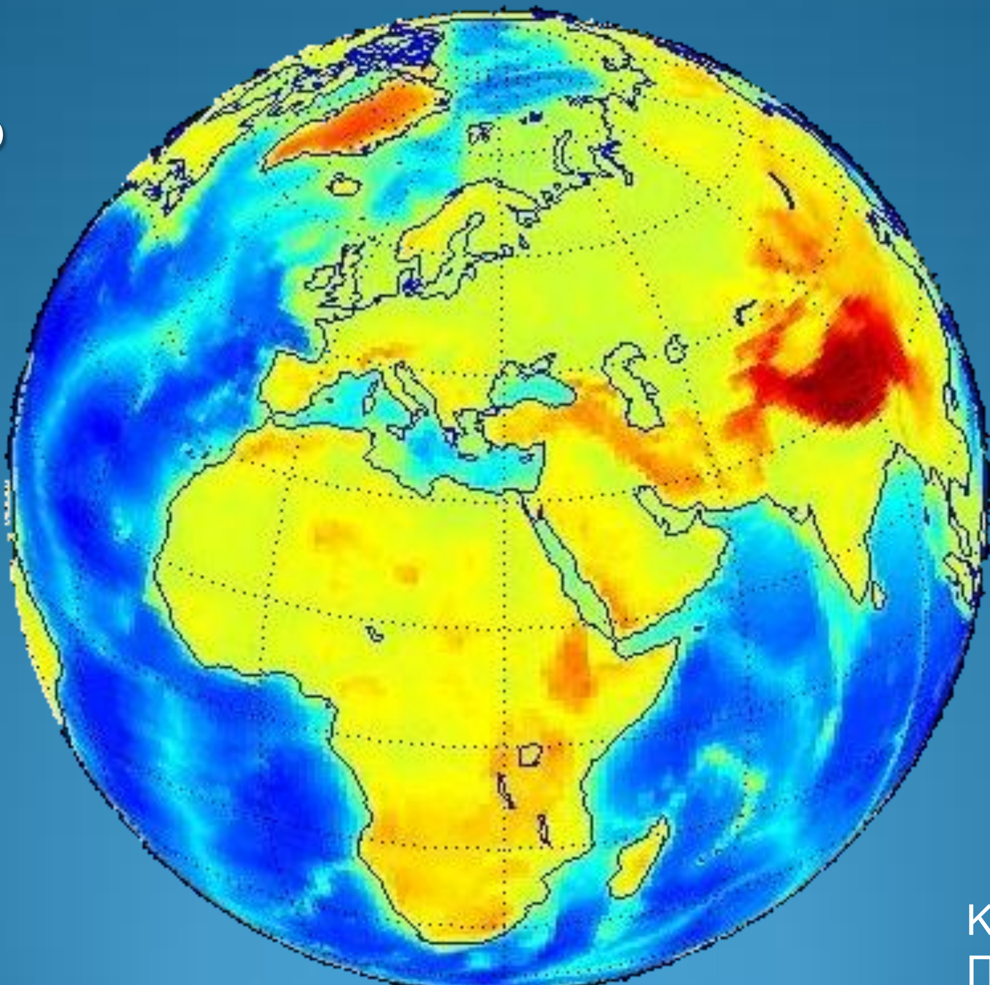
ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ & ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΓΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ 2^{Ο}

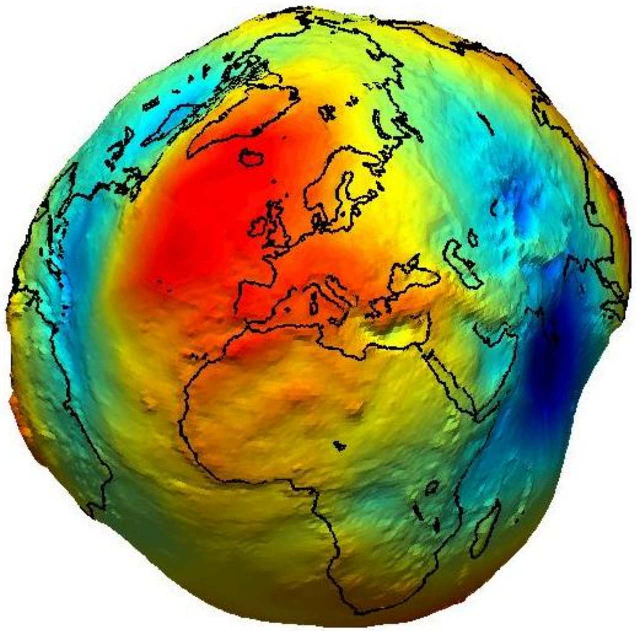


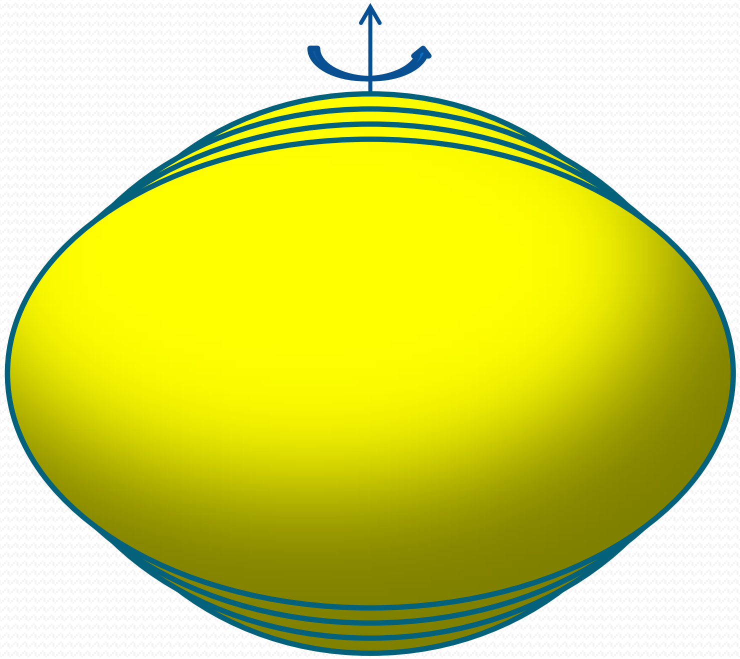
Κοντοπούλου Δέσποινα
Παπαζάχος Κων/νος
Καραμήτρου Αλεξάνδρα

ΒΑΡΥΤΗΤΑ & ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΓΗΣ
Τι σχέση έχουν;

Δεν είναι προφανής ο τρόπος σύνδεσης του βαρυτικού πεδίου και του σχήματος της Γης, αλλά και άλλων φαινομένων όπως των παλιρροιών, και των διαφόρων κινήσεων που κάνει η Γη. Όμως η σύνδεση αυτή είναι εμφανής αν σκεφτούμε ότι:

- Το σχήμα της Γης διαμορφώνεται από την αλληλεπίδραση της βαρυτικής έλξης που ασκεί η ίδια στον εαυτό της (το βάρος της) και την περιστροφική της κίνηση

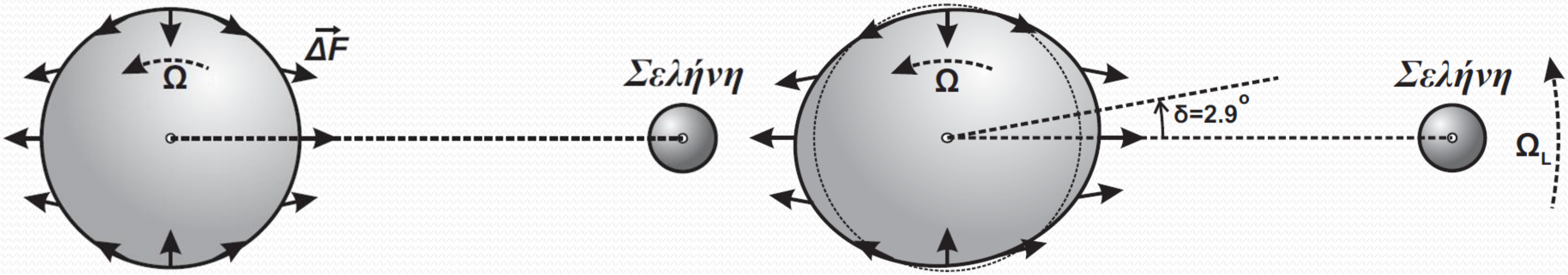




ΒΑΡΥΤΗΤΑ & ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΓΗΣ
Τι σχέση έχουν;

Δεν είναι προφανής ο τρόπος σύνδεσης του βαρυτικού πεδίου και του σχήματος της Γης, αλλά και άλλων φαινομένων όπως των παλιρροιών, και των διαφόρων κινήσεων που κάνει η Γη. Όμως η σύνδεση αυτή είναι εμφανής αν σκεφτούμε ότι:

- Οι επιφανειακές, εσωτερικές και άλλες κινήσεις της Γης και οι αλληλεπιδράσεις της με τα άλλα ουράνια σώματα δίνουν πληροφορίες για τη δομή της Γης (δομή πυκνότητας, κλπ.)



Παλιρροιακή Τριβή

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από τους πρώτους που πίστεψαν ότι η Γή είναι σφαιρική ήταν ο φιλόσοφος και μαθηματικός Ερατοσθένης (πυραμίδες).

Ο Γαλιλαίος “πραγματοποίησε” το γνωστό πείραμα από τον πύργο της Πίζας και έδειξε ότι η έλξη της Γής προσδίδει στα σώματα μία επιτάχυνση που καλείται Ένταση της Βαρύτητας.

Ο Νεύτωνας, εκτός από την θεωρία της βαρύτητας, θεμελίωσε ταυτόχρονα και την φυγόκεντρη δύναμη, που είναι μεγαλύτερη στον Ισημερινό πάρα στους πόλους.

Ο συνδυασμός αυτών των 2 δυνάμεων προσδίδει στη Γη το **ελλειψοειδές** σχήμα της. Σ’ αυτό η πολική ακτίνα είναι **~21 km** μικρότερη από την Ισημερινή. Αυτό θα ήταν (σχεδόν) το αληθινό σχήμα της Γης αν ήταν σε ρευστή κατάσταση, υπό την επίδραση βαρύτητας και φυγοκέντρου δυνάμεως.

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

1670 (Ακαδ. Επιστ. Παρισιού)
Στόχος: προσδιορισμός της ακτίνας της Γης με βάση τη μέτρηση του μήκους ενός τόξου μεσημβρινού.

1736 οργανώθηκαν 2 αποστολές

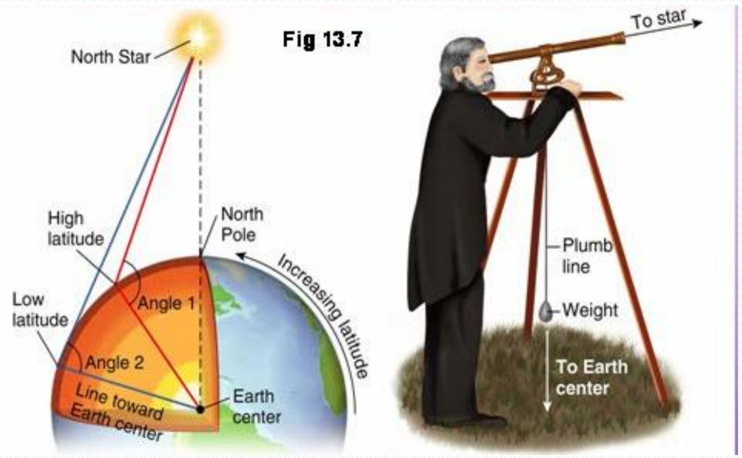
- Λαπωνία (A. Clairaut-P. L. Maupertuis)
- Περού (P. Bouguer)

Μετρήθηκε, και στις 2 περιοχές, μια μοίρα μεσημβρινού και βρέθηκε να αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη απόσταση κοντά στους πόλους απ’ ότι στον Ισημερινό.

<u>Επομένως</u>: Πλάτυνση της Γης ~ 1/300 της γήινης ακτίνας.

ΙΣΟΣΤΑΣΙΑ

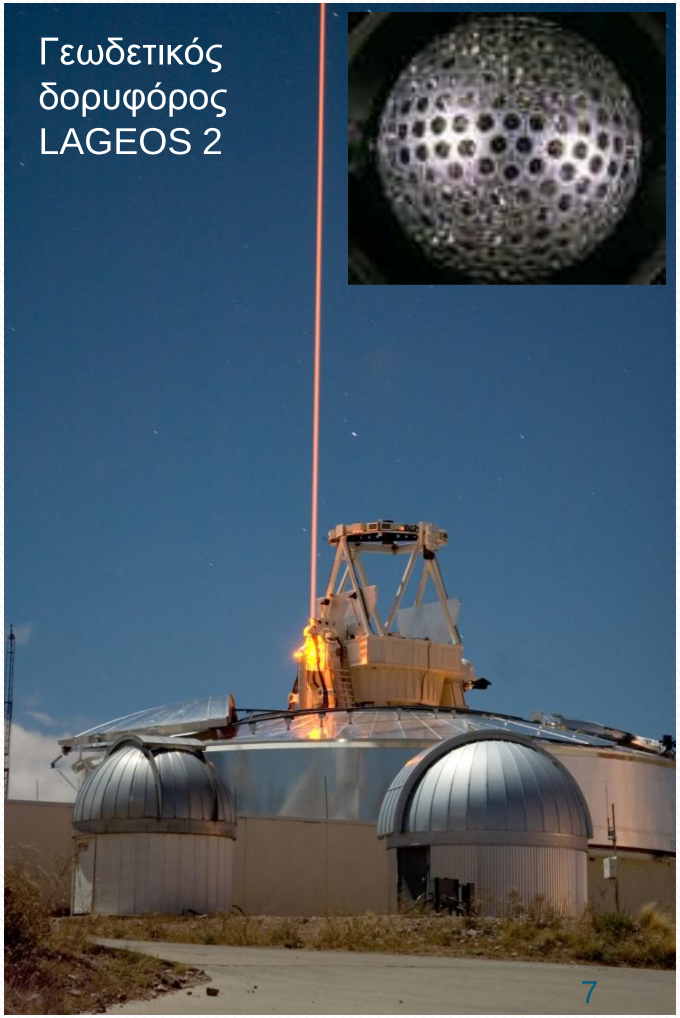
Από το 1735 μέχρι το 1745 ο Bouguer και οι συνεργάτες του έκαναν μετρήσεις στο Περού για να καθορίσουν το σχήμα της Γης. Η εκτροπή του νήματος της στάθμης στις ‘Ανδεις ήταν πολύ μικρότερη. Το ίδιο βρήκε στις αρχές του 19ου ο Sir Everest στα Ιμαλάια.



1855: Pratt και Airy προτείνουν 2 διαφορετικά μοντέλα.
1889: Χρησιμοποιείται ο όρος ***ισοστασία.*** Το έλλειμμα μάζας κάτω από τα βουνά βρέθηκε σχεδόν ίσο με τη μάζα των βουνών υδροστατική ισορροπία

ΔΙΑΣΤΗΜΙΚΗ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ

Στηρίζεται στις μετρήσεις από δορυφόρους. Δίνει σημαντικές πληροφορίες για το σχήμα της Γης, το πεδίο βαρύτητας, τις παραμορφώσεις του φλοιού, τις παλίρροιες και την περιστροφή της Γης.



ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΓΗΣ

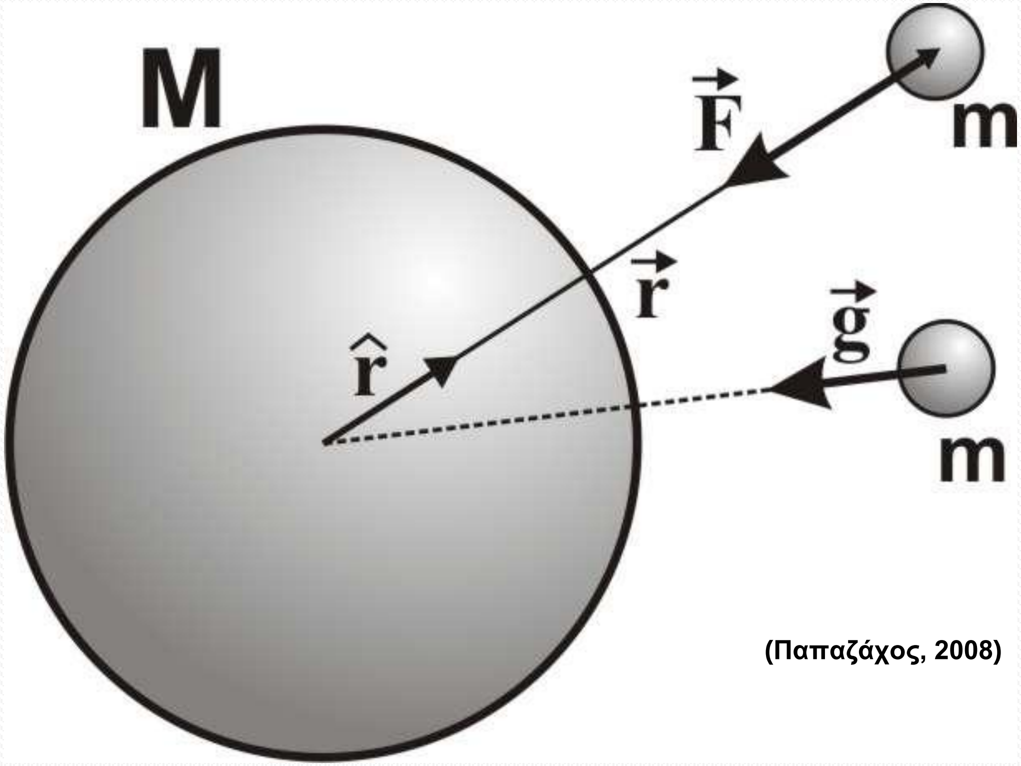
Τι είναι βαρύτητα / βαρυτικό πεδίο?

- Ένα από τα τρία είδη πεδίων ή δυνάμεων μεταξύ υλικών σωμάτων.
- Είναι ο χώρος όπου η Γή ασκεί ελκτική δύναμη σε κάθε σώμα που βρίσκεται μέσα σ’αυτόν (βάρος).

Νόμος Νεύτωνα

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

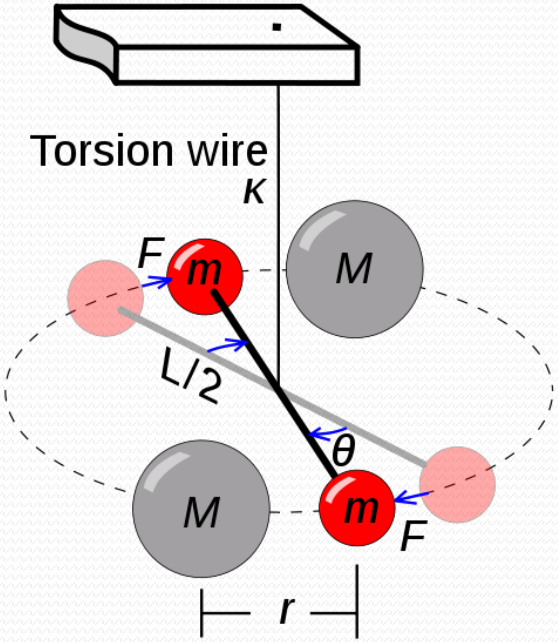


ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΓΗΣ

Παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας

$\boldsymbol{G} = 6.67\ 10^{-11}\ m^3\ Kgr^{-1}\ sec^{-2}$ (SI)

$= 6.67\ 10^{-8}\ cm^3\ gr^{-1}\ sec^{-2}$ (CGS)



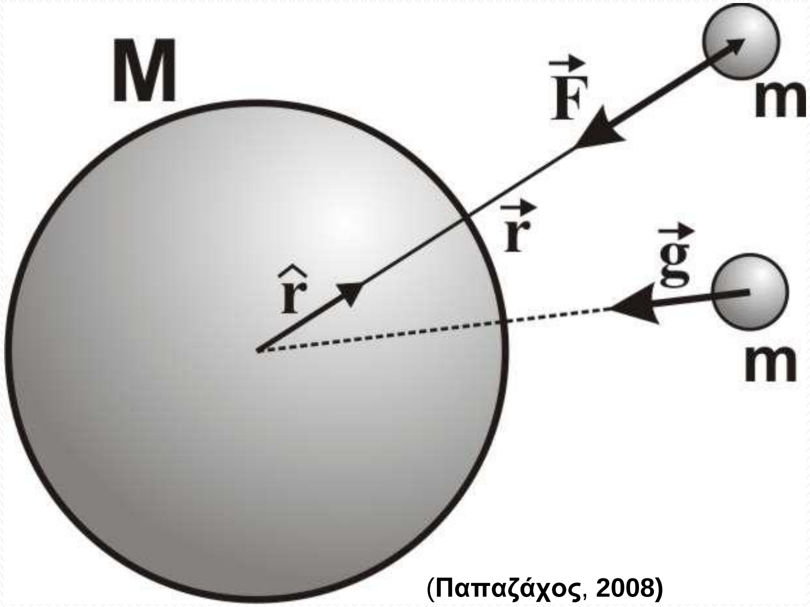
Πείραμα Cavendish

(σχήμα από Chris Burks)

ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΓΗΣ

Ένταση: $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m} = - G\dfrac{M}{r^2}\hat{r}$

$$g = \frac{GM}{r^2}$$



(Παπαζάχος, 2008)

Μονάδες: *1**gal** = 1 cm/sec*^{2} *g=981**gal**~1000**gal***

*1**mgal**=10*$^{-3}$ *cm/sec*^{2} *1mg ~ 1**gal***

Δυναμικό: $U = \int_r^{\infty} \vec{g} \cdot \vec{dr} = -\dfrac{GM}{r}$

Οι συνιστώσες της έντασης του πεδίου βαρύτητας σε συνάρτηση με το δυναμικό θα είναι:

$$g_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad g_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad g_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{ή} \qquad \vec{g} = -\overrightarrow{grad}U = -\vec{\nabla}U$$

Ισοδυναμικές Επιφάνειες

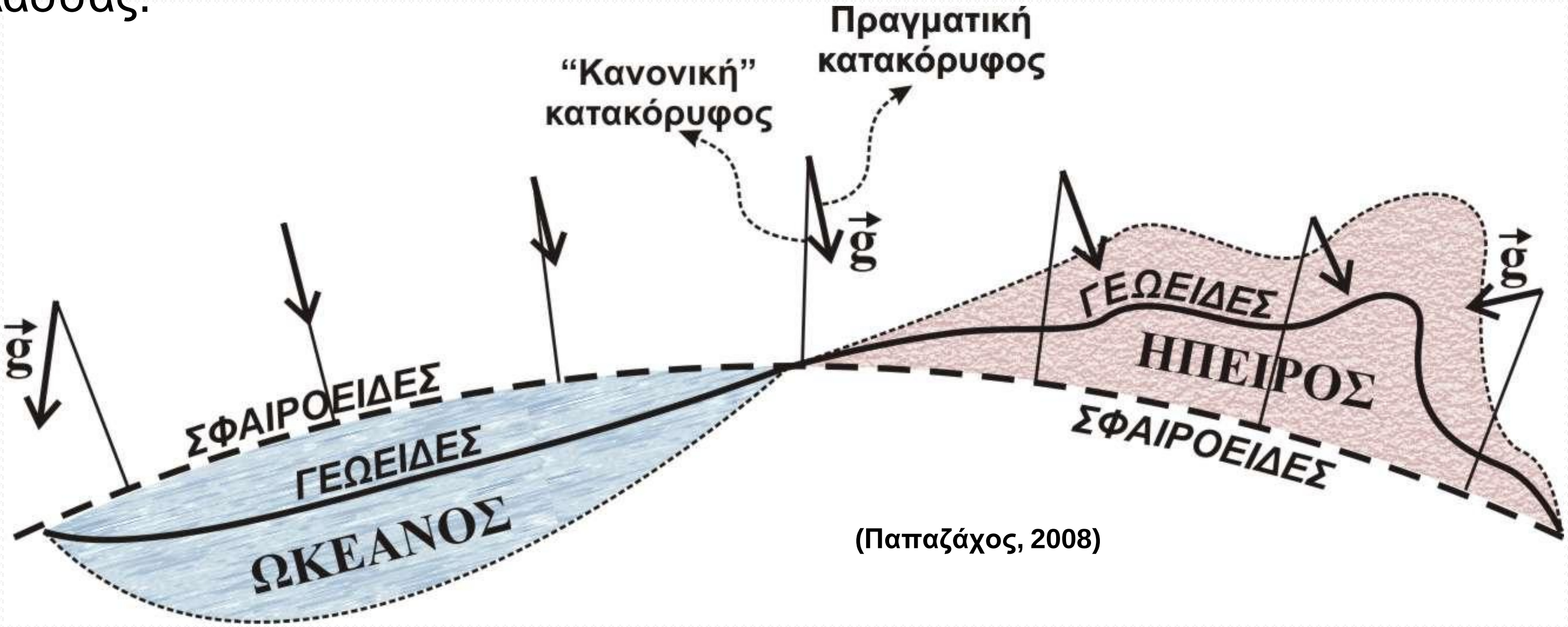
Ισοδυναμικές είναι οι επιφάνειες πάνω στις οποίες το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου είναι παντού το ίδιο.

$$U(x,y,z)=c$$

c: σταθερή τιμή του δυναμικού στην ισοδυναμική επιφάνεια

Η πιο ενδιαφέρουσα ισοδυναμική επιφάνεια είναι η επιφάνεια της θάλασσας, αφού το νερό αν δεν είχε το ίδιο δυναμικό στην επιφάνειά του θα είχε κινηθεί λόγω της βαρύτητας, μέχρι να πάρει το σχήμα μίας ισοδυναμικής επιφάνειας!

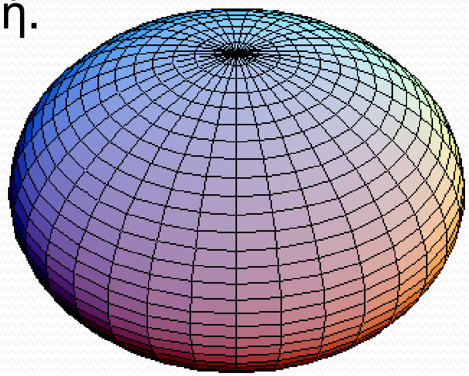
Γεωειδές: Η ισοδυναμική επιφάνεια που περιβάλλει ολόκληρη τη Γη και που πάνω της το δυναμικό είναι ίσο με το δυναμικό στη μέση αδιατάρακτη επιφάνεια της θάλασσας.



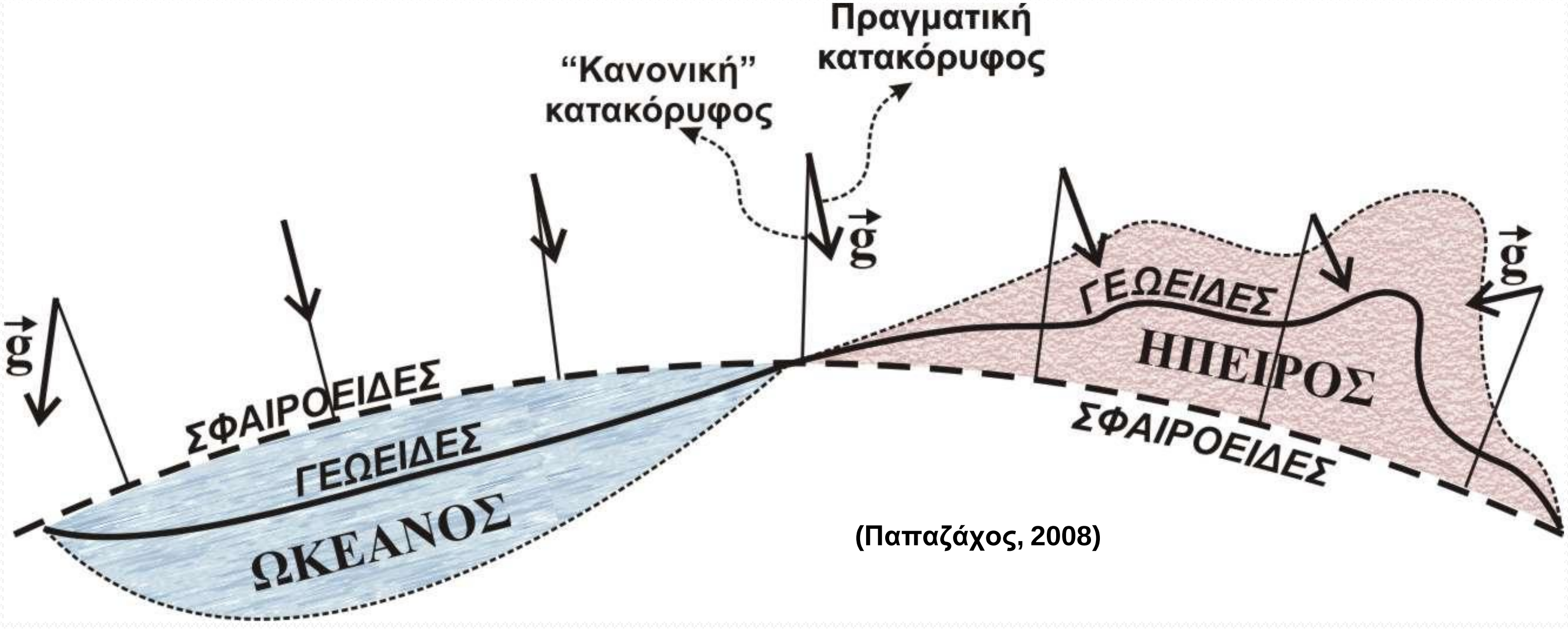
(Παπαζάχος, 2008)

Ισοδυναμικές Επιφάνειες

Είναι γνωστό από το 18^{0} αιώνα (Maupertuis) ότι η Γη έχει σχήμα που μοιάζει με ελλειψοειδές από περιστροφή.

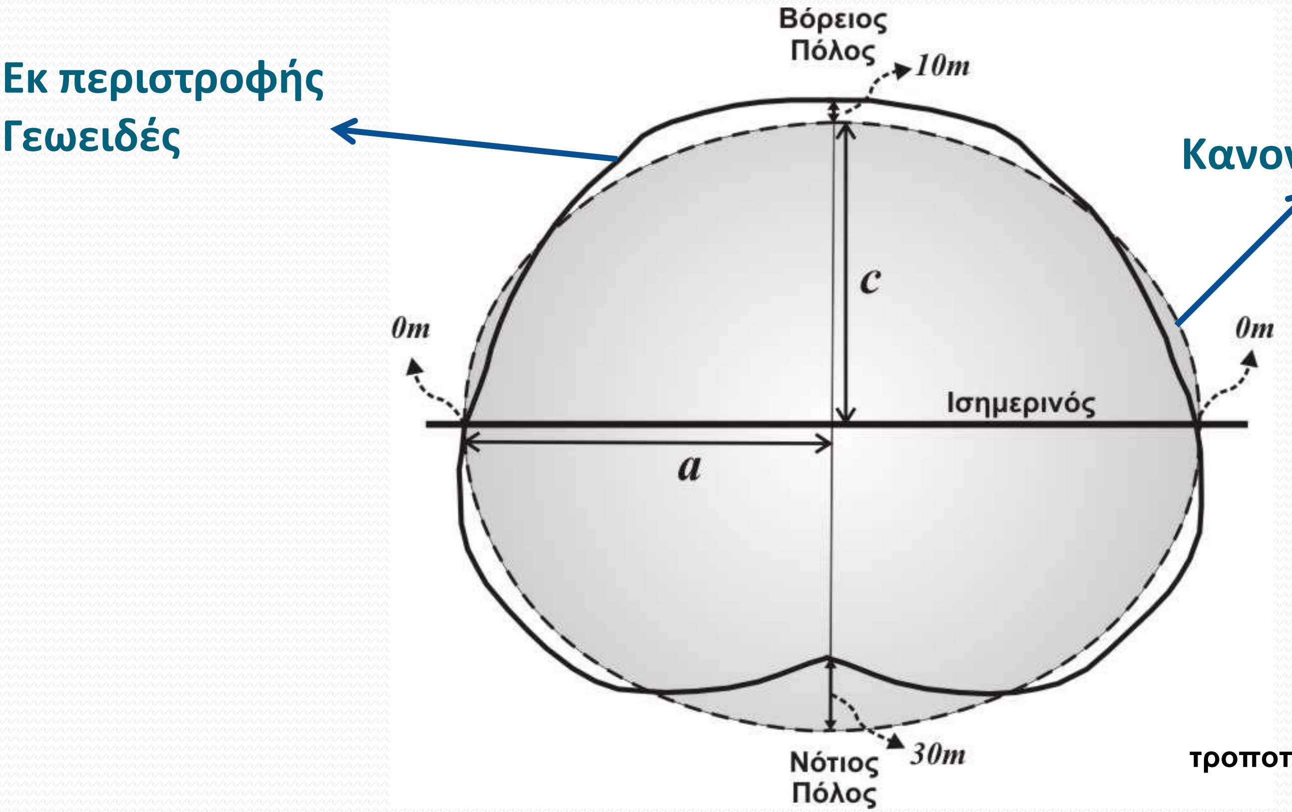


Σφαιροειδές: Μία ομαλή δευτεροβάθμια επιφάνεια που έχει το ίδιο δυναμικό με το γεωειδές και το προσεγγίζει καλύτερα



(Παπαζάχος, 2008)

Ως **κανονικό σφαιροειδές** ορίζουμε την ισοδυναμική επιφάνεια που περικλείει τον ίδιο όγκο με την ισοδυναμική επιφάνεια του γεωειδούς και που το σχήμα της καθορίζεται **μόνο από τη Νευτώνεια έλξη** που ασκεί η Γη (βαρυτική δύναμη) και από την οφειλόμενη στην περιστροφή της Γης **φυγόκεντρο δύναμη**.



(Παπαζάχος 2008 τροποποιημένο από King-Hele,1969)

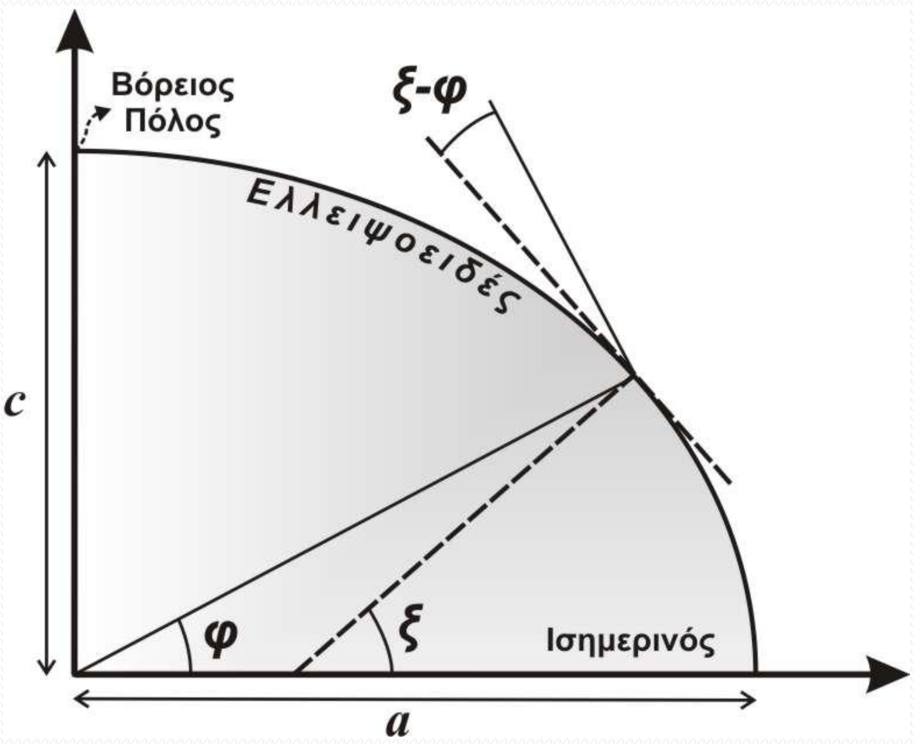
Στην πράξη το **σφαιροειδές** σχεδόν συμπίπτει με ένα απλό **ελλειψοειδές από περιστροφή,** το οποίο είναι ελαφρά εξογκωμένο στον Ισημερινό λόγω της σχεδόν υδροστατικής ανταπόκρισης της Γης στην περιστροφή της.

Αυτή η παραμόρφωση του ελλειψοειδούς περιγράφεται με την ποσότητα *f, η οποία ονομάζεται* **ελλειπτικότητα ή γεωμετρική πλάτυνση** *:*

$$f = \frac{a - c}{a}$$

α, μήκος της ακτίνας στο Ισημερινό επίπεδο *(~ 6378km)*

c, μήκος της ακτίνας στους πόλους *(~ 6357km)*



(Παπαζάχος, 2008)

Η τιμή της πλάτυνσης είναι περίπου **1/300**, σε πολύ καλή συμφωνία με την τιμή που προβλέπεται από μοντέλα που θεωρούν ότι η Γη βρίσκεται σε **υδροστατική ισορροπία**.

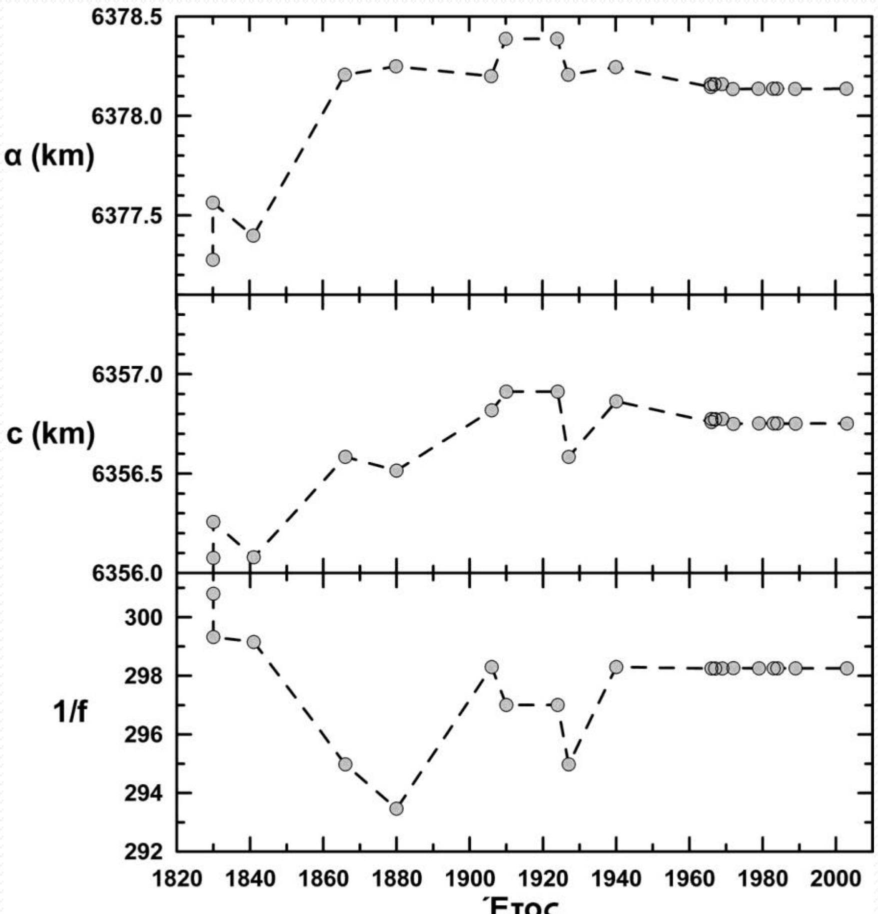
Στον παρακάτω Πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές της Ισημερινής και Πολικής ακτίνας (σε μέτρα) και της αντίστοιχης αντιστρόφου πλάτυνσης για μερικά από τα σημαντικότερα ελλειψοειδή τα οποία έχουν προταθεί ιστορικά.

Το τελευταίο μοντέλο (WGS84) είναι το πιο ευρύτατα χρησιμοποιούμενο μοντέλο σήμερα, αφού σε αυτό αναφέρεται το Παγκόσμιο Δορυφορικό Σύστημα Εντοπισμού Θέσης (Global Positioning System-GPS).

Ελλειψοειδές	Ισημερινός άξονας (α)	Πολικός άξονας (c)	Αντίστροφη Πλάτυνση 1/f
Bessel (1841)	6377397	6356079	299.152813
Clarke (1866)	6378206	6356584	294.978698
International (1924)	6378388	6356912	297.000000
GRS (1980)	6378137	6356752	298.257222
WGS (1984)	6378137	6356752	298.257224

Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι οι βασικές τιμές που καθορίζουν το σχήμα της Γης ήταν καλά γνωστές από τα μέσα του 19ου αιώνα.

Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει τη χρονική μεταβολή των τιμών των τριών βασικών παραμέτρων (a, c, 1/f) διαφόρων δημοσιευμένων ελλειψοειδών από το 1830 μέχρι σήμερα.



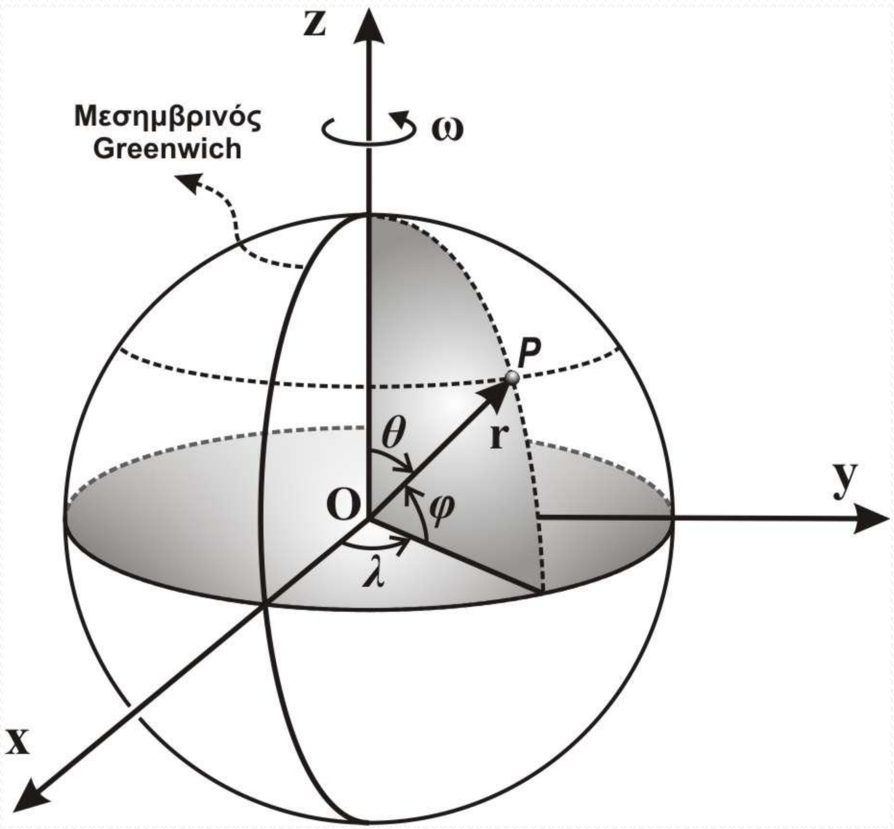
(Παπαζάχος, 2008)

Φαίνεται η σχετικώς μικρή μεταβολή των παραμέτρων, ιδίως μετά τις αρχές του 20ου αιώνα.

Η ακτίνα σφαίρας που έχει τον ίδιο όγκο με αυτόν του ελλειψοειδούς από περιστροφή είναι ίση με $R=(a^2c)^{1/3}$~$6371km$, τιμή που συνήθως χρησιμοποιούμε όταν υποθέτουμε ότι η Γη έχει σφαιρικό σχήμα.

Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές

Έστω τυχαίο σημείο P έξω από της Γη, το οποίο περιστρέφεται μαζί με τη Γη γύρω από τον άξονα περιστροφής της *z.*



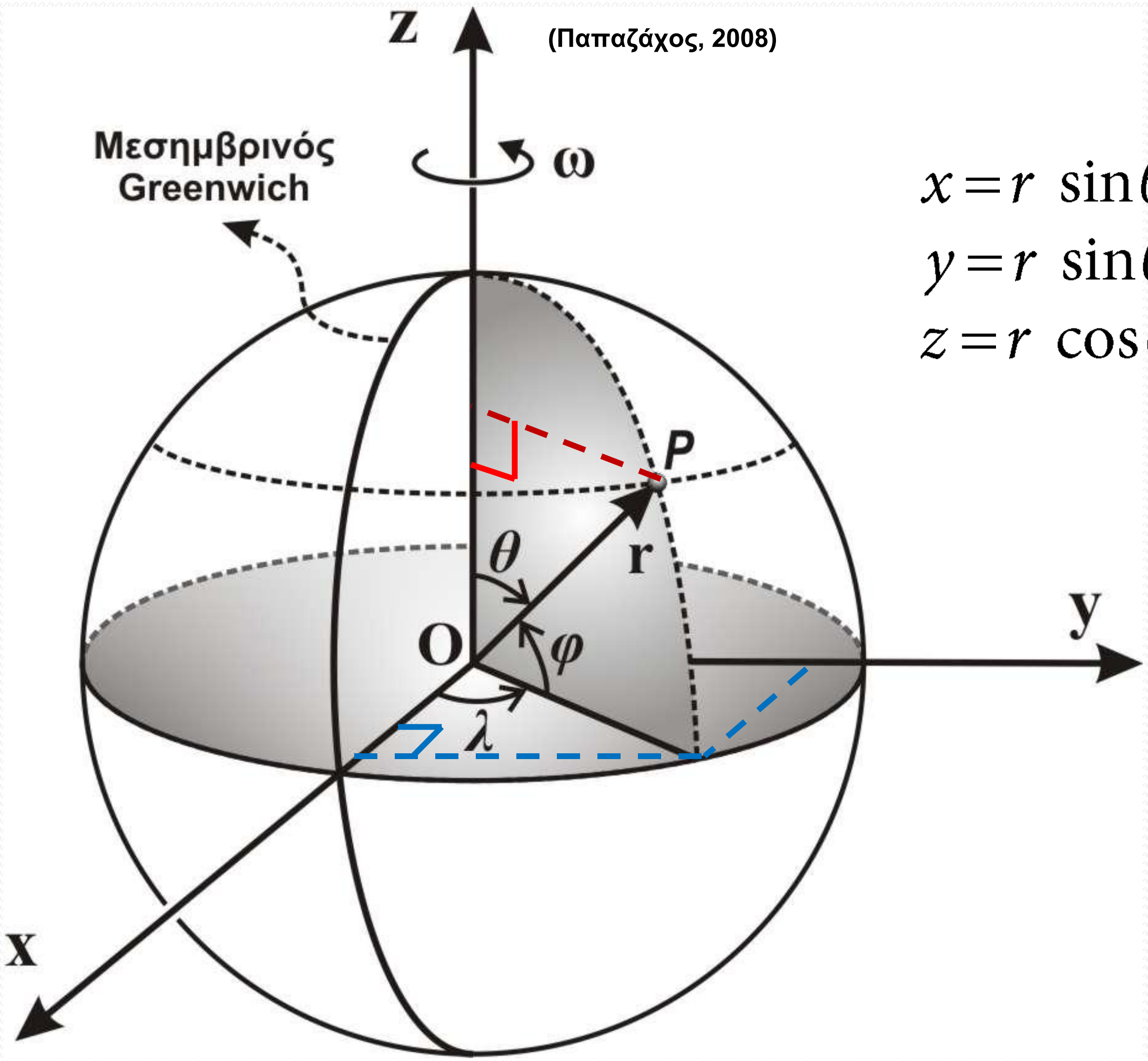
(Παπαζάχος, 2008)

Το σημείο αυτό έχει:

Α) Καρτεσιανές συντεταγμένες, *x, y, z ως προς ορθογώνιο σύστημα αξόνων, οι οποίοι έχουν αρχή το* κέντρο της Γης.

Β) Σφαιρικές συντεταγμένες, *r, λ, θ, σε σύστημα με αρχή το* κέντρο της Γης και άξονες *x* (ορισμού του μηδενικού μεσημβρινού, από όπου μετράμε το γεωγραφικό μήκος) και *z* (από όπου μετράμε το *συμπληρωματικό* γεωγραφικό πλάτος).

Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές



$$x = r\ \sin\theta\ \cos\lambda = r\ \cos\varphi\ \cos\lambda$$

$$y = r\ \sin\theta\ \sin\lambda = r\ \cos\varphi\ \sin\lambda$$

$$z = r\ \cos\theta = r\ \sin\varphi$$

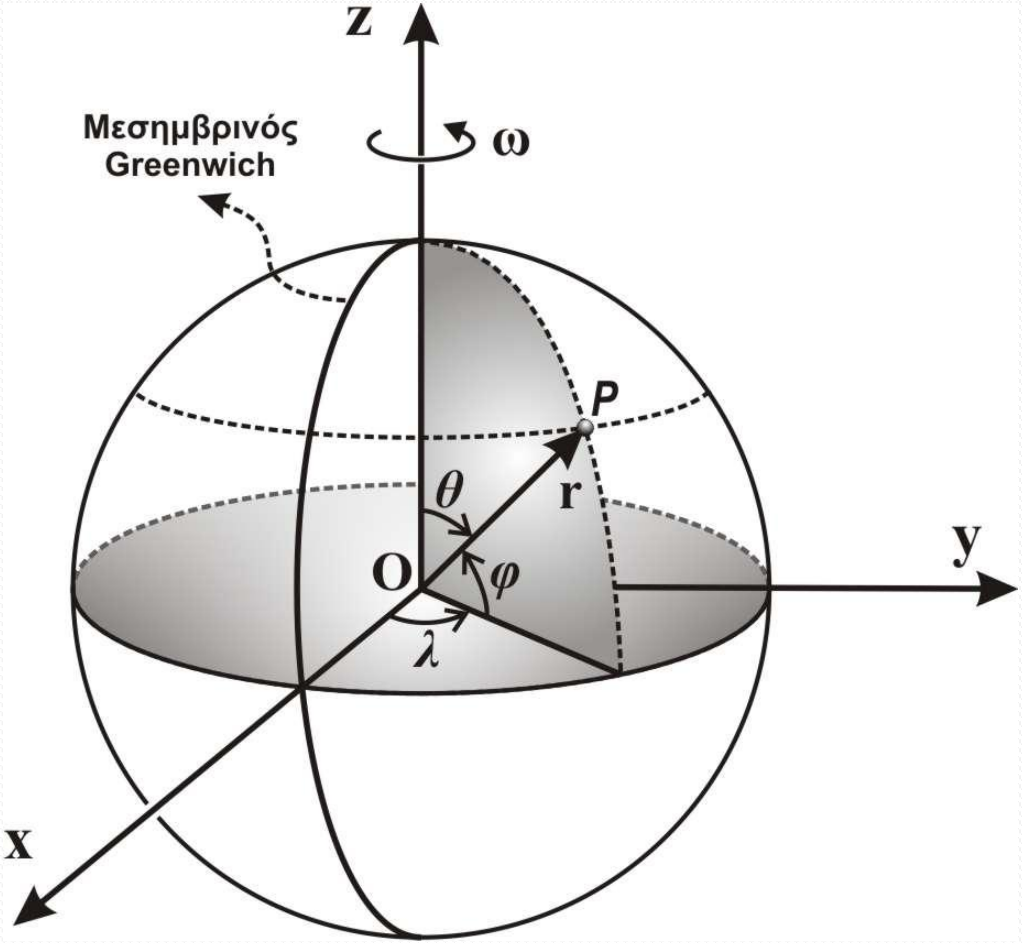
$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές

Σφαίρα



$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$$

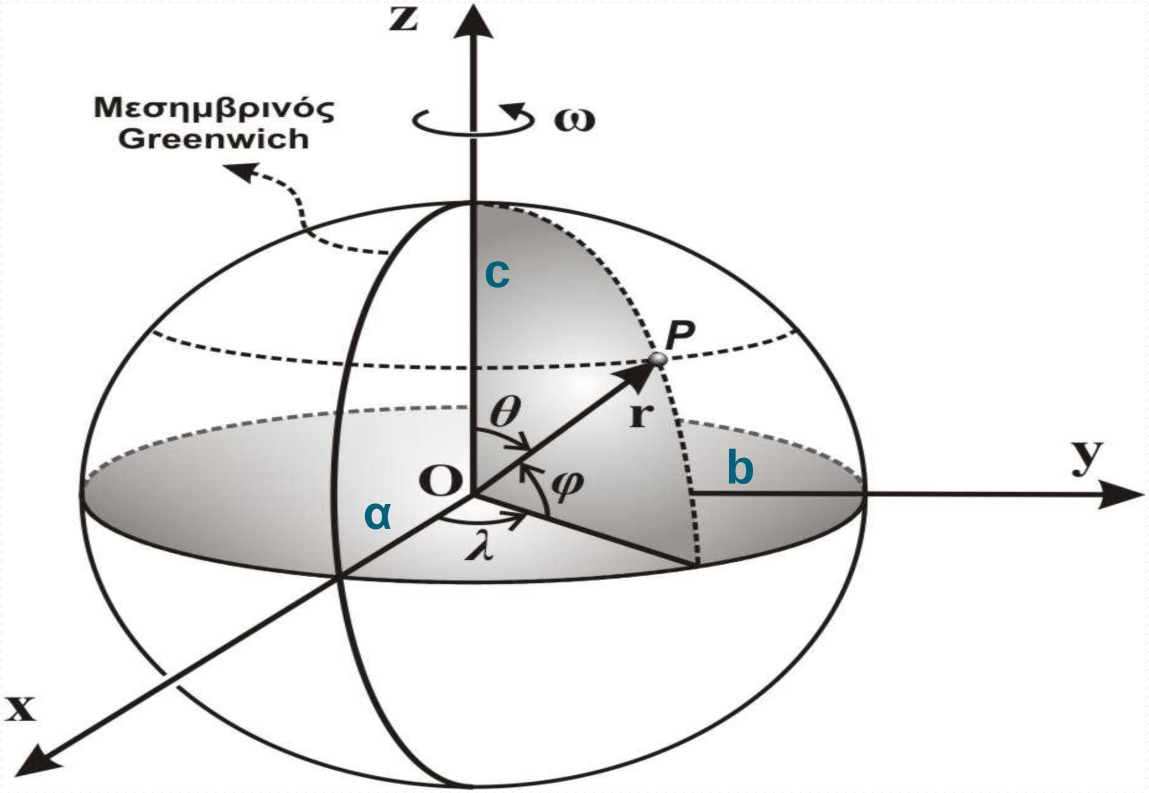
$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow r = \alpha$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

$$V = \pi\,\alpha^3$$

Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές

Ελλειψοειδές

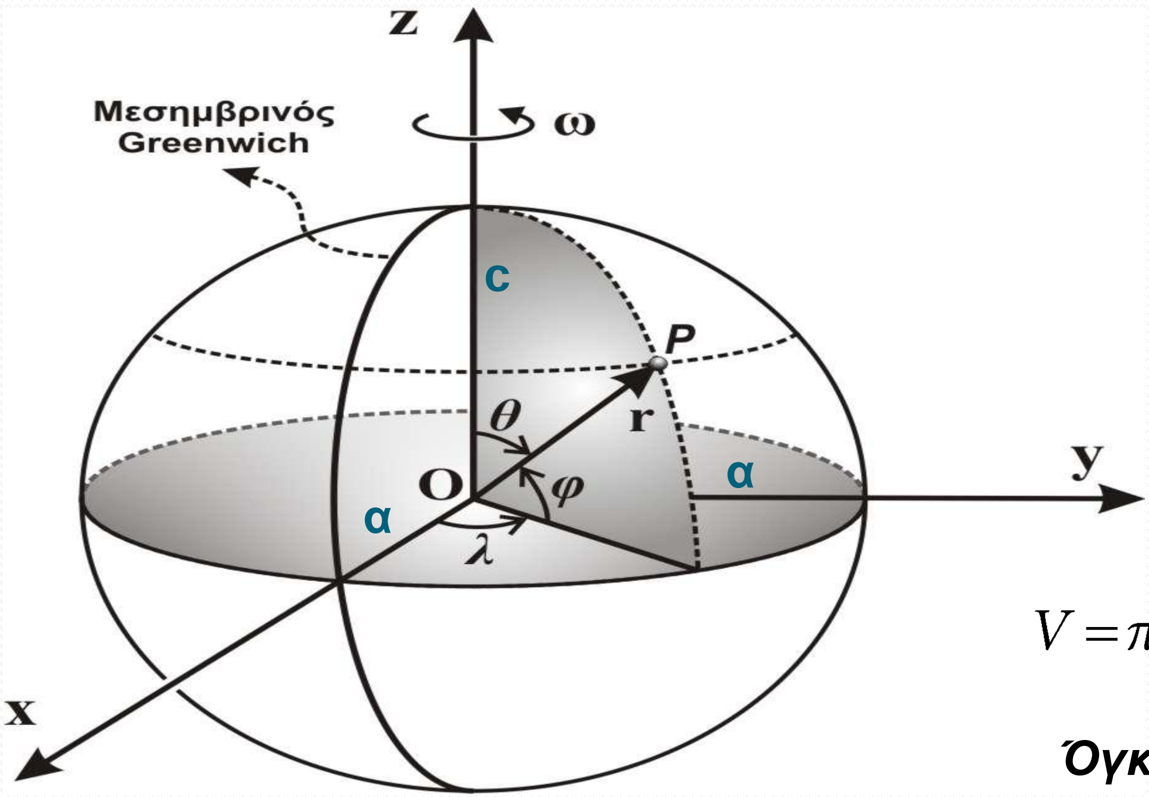


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$V=\pi\,\alpha bc$$

Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής



$$a=b \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$V=\pi\,\alpha\alpha c=\pi\,\alpha^2 c$$

$$V=\pi\,R^3=\pi\,\alpha^2 c \Rightarrow R=\left(\alpha^2 c\right)^{1/3}$$

Όγκος Ισοδύναμής σφαίρας

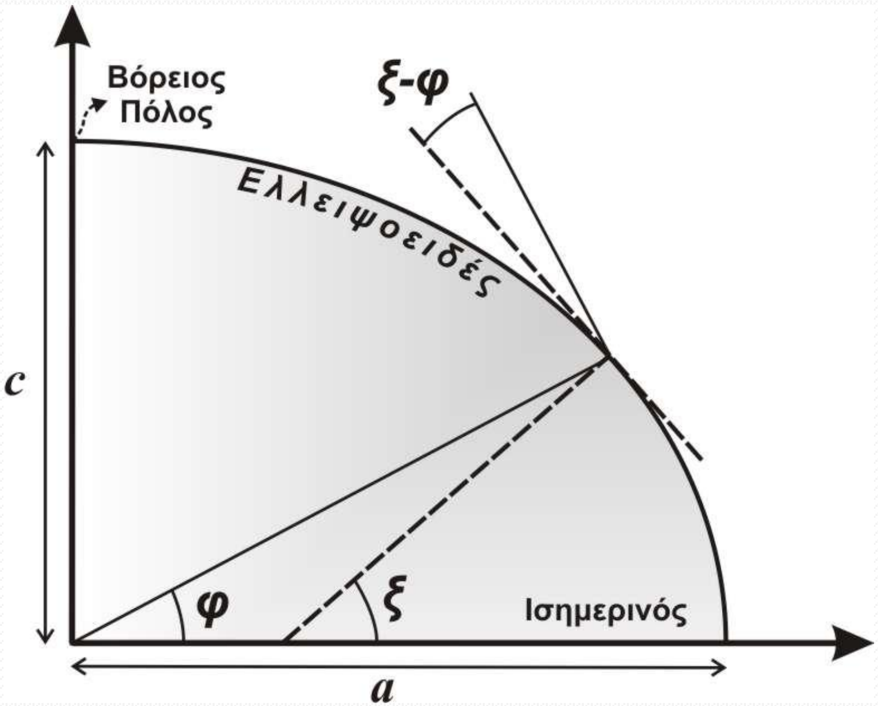
Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$x=r\ \sin\theta\ \cos\lambda=r\ \cos\varphi\ \cos\lambda$$
$$y=r\ \sin\theta\ \sin\lambda=r\ \cos\varphi\ \sin\lambda$$
$$z=r\ \cos\theta=r\ \sin\varphi$$

$$\frac{r^2\cos\varphi^2\mathbf{f}}{a^2}+\frac{r^2\sin\varphi^2\mathbf{f}}{c^2}=1$$



Ελλειπτικότητα ή γεωμετρική πλάτυνση

$$f=\frac{a-c}{a}\sim\frac{1}{300}$$

Εκκεντρότητα

$$\varepsilon^2=f(2-f)=\frac{a^2-c^2}{a^2}$$

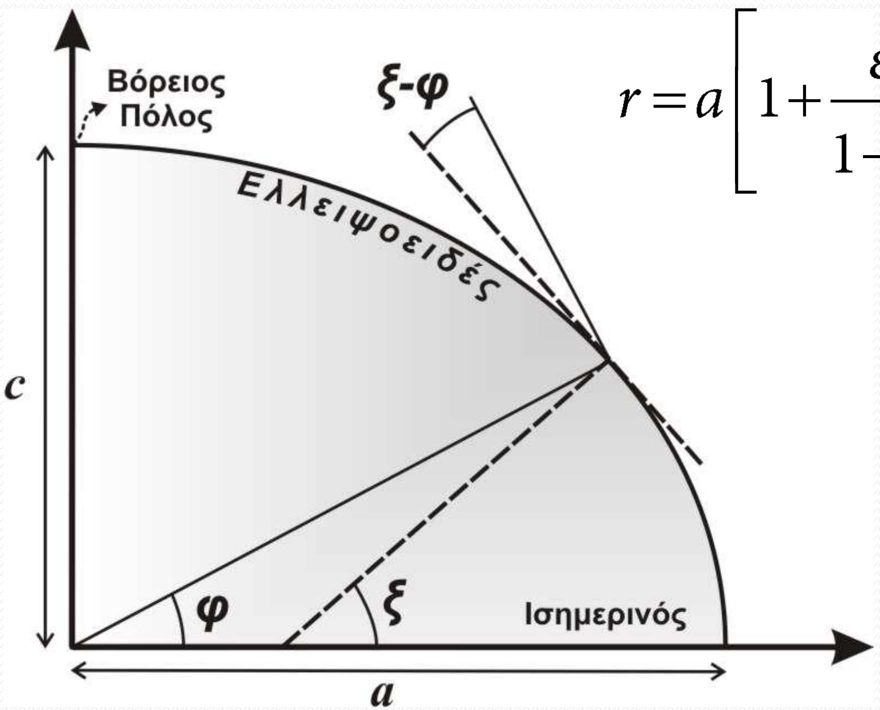
Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

$$\frac{r^2\cos\varphi^2\,\mathbf{f}}{a^2}+\frac{r^2\sin\varphi^2\,\mathbf{f}}{c^2}=1 \qquad \varepsilon^2 = f(2-f) = \frac{a^2-c^2}{a^2}$$

Με επίλυση της σχέσης εκκεντρότητας ως προς *c* και αντικατάσταση στην εξίσωση του ελλειψοειδούς, έχουμε:

$$r=a\left[1+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\sin\varphi^2\,\mathbf{f}\right]^{-\frac{1}{2}}=a\left[1+\frac{f(2-f)}{(1-f)^2}\sin\varphi^2\,\mathbf{f}\right]^{-\frac{1}{2}}$$



Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

$$r = a\left[1+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\sin\varphi^2\,\mathbf{f}\right]^{-\frac{1}{2}} = a\left[1+\frac{f(2-f)}{(1-f)^2}\sin\varphi^2\,\mathbf{f}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Η παραπάνω σχέση είναι μη γραμμική ως προς *f* (και *ε*), που είναι πολύ μικρές ποσότητες (~1/300) και μπορούν να θεωρηθούν σχεδόν ως *απειροστά*. Στη Γεωφυσική και Γεωδαισία επιλέγουμε συνήθως την έκφραση με όρους πολυωνυμικούς (ακρίβεια κάποιας τάξης)

Ερώτημα

Να προσδιοριστεί η εξίσωση του ελλειψοειδούς σε συνάρτηση με το γεωκεντρικό πλάτος, *φ*, με ακρίβεια όρων μέχρι 2ης τάξης ως προς την πλάτυνση *f*.

Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

$$r = a\left[1 + \frac{f(2-f)}{(1-f)^2}\sin\varphi^2\,\mathbf{f}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad Όρος: \quad \left[1 + \frac{f(2-f)}{(1-f)^2}\sin\varphi^2\,\mathbf{f}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \left(όροι\ 3^{ης}\ \&\ ανώτερης\ τάξης\right)$$

$$r = a\left[1 + f(2-f)(1+2f-3f^2)\sin\varphi^2\,\mathbf{f}\right]^{-\frac{1}{2}} = a\left[1 + (2f+3f^2)\sin\varphi^2\,\mathbf{f}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

όπου οι όροι $3^{ης}$ και μεγαλύτερης τάξης ως προς *f* έχουν παραληφθεί.

Εφαρμόζοντας εκ νέου τη σχέση:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \left(όροι\ 3^{ης}\ \&\ ανώτερης\ τάξης\right)$$

Σφαιρικές συντεταγμένες & ελλειψοειδές

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

$$r = a\left[1+(2f+3f^2)\sin\varphi^2\,\mathbf{f}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 + \left(\acute{o}\rho o\iota\ 3^{\eta\varsigma}\ \&\ \alpha\nu\acute{\omega}\tau\varepsilon\rho\eta\varsigma\ \tau\acute{\alpha}\xi\eta\varsigma\right)$$

$$r = a\left[1-f\sin^2\phi-\frac{3}{8}f^2\sin^2 2\phi\right]$$

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής με ακρίβεια 2ης τάξης ως προς f

$$r = a\left[1-f\sin^2\phi\right]$$

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής με ακρίβεια 1ης τάξης ως προς f

Εξωτερικό Πεδίο Βαρύτητας της Γης

Έστω τυχαίο σημείο P έξω από της Γη, το οποίο περιστρέφεται μαζί με τη Γη γύρω από τον άξονα περιστροφής της *z. Το σημείο αυτό έχει καρτεσιανές* συντεταγμένες, *x, y, z ως προς ορθογώνιο σύστημα αξόνων, οι οποίοι έχουν αρχή το* κέντρο της Γης.

Το δυναμικό που οφείλεται στην έλξη ολόκληρης της Γης είναι

$$U_1 = -G\int_0^m \frac{dm}{q}$$

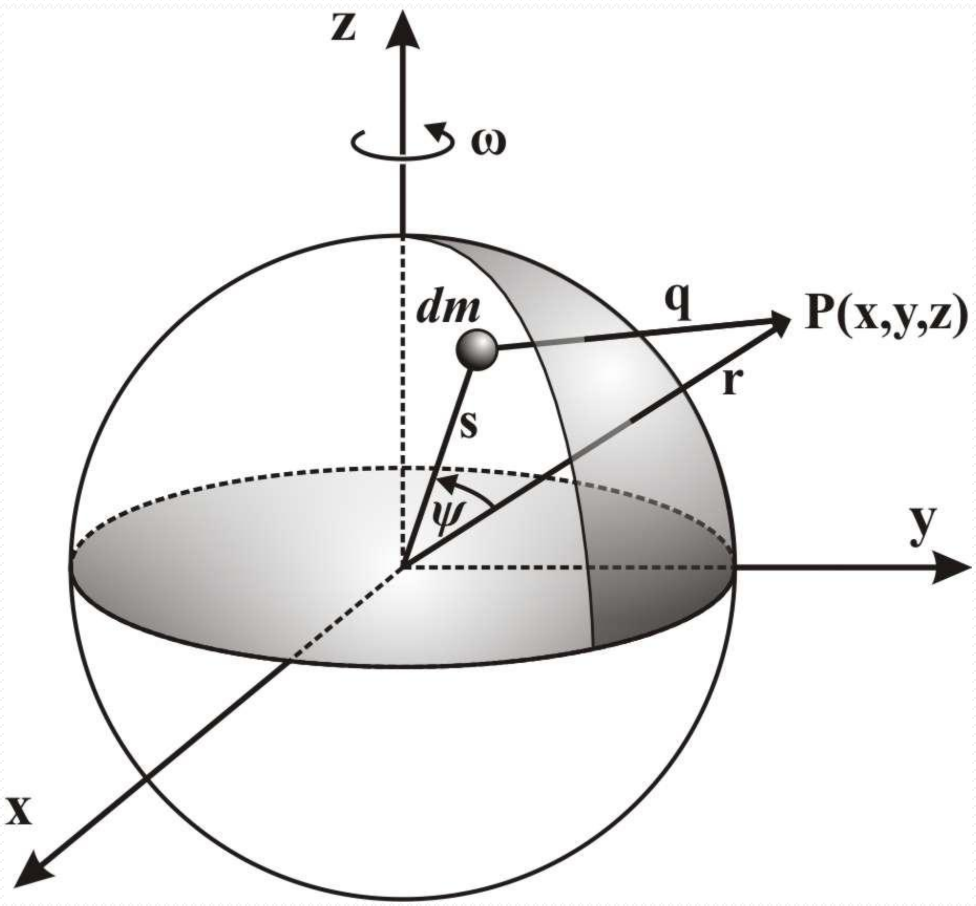
Το δυναμικό που οφείλεται στην περιστροφή της Γης είναι:

$$U_2 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\omega^2$$

q *η απόσταση του σημείου* ***P*** *από τη θέση της* στοιχειώδους μάζας, ***dm****.*

M *είναι η μάζα της Γης*

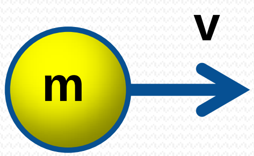
ω *η γωνιακή της ταχύτητα*



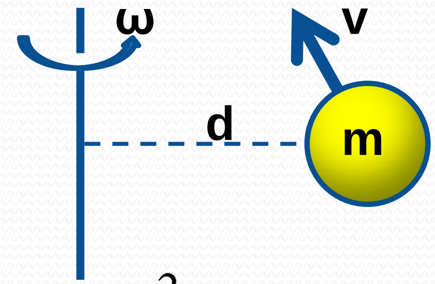
(Παπαζάχος, 2008)

Μάζα και ροπή αδράνειας

Μάζα ***m***



Ροπή αδράνειας ***I***



$$I = md^2$$

Ταχύτητα v

Γων. Ταχύτητα $v = \omega d \Rightarrow \omega = v/d$

Κιν. Ενέργεια $T = \frac{1}{2} m v^2$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m d^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Ορμή $p = mv$

Στροφορμή $L = I\omega$

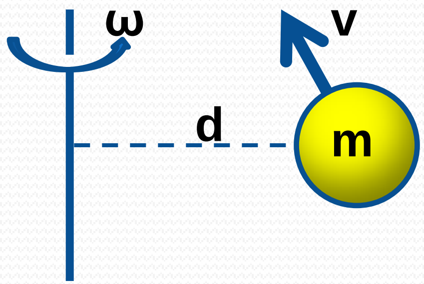
Δύναμη $F = ma = m \frac{dv}{dt}$

Ροπή $T = I a_\theta = I \frac{d\omega}{dt}$

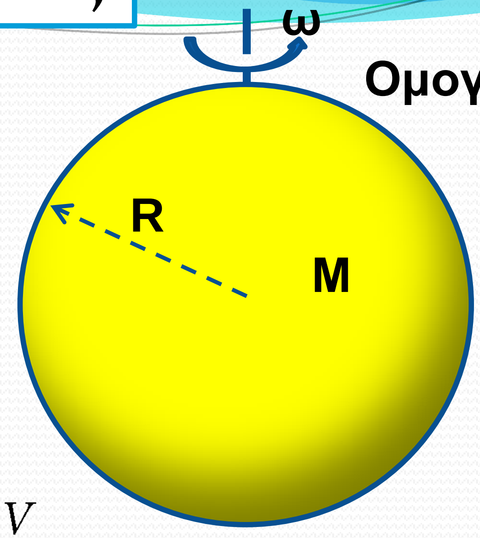
Ροπή αδράνειας

Ροπή αδράνειας *I*

$$I = md^2$$



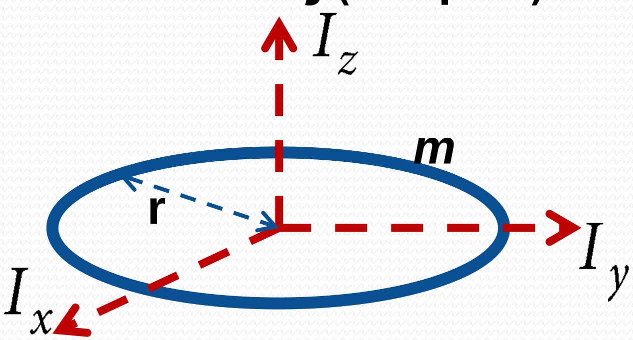
Ομογενής σφαίρα



$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

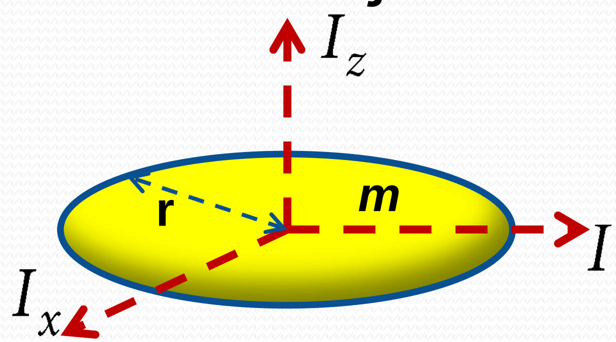
$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} m_i d^2 = \int_0^M d^2\, dm = \int_0^V \rho d^2\, dV$$

Δακτύλιος (στεφάνι)



$$I_z = mr^2 \quad I_x = I_y = \frac{1}{2} mr^2$$

Δίσκος

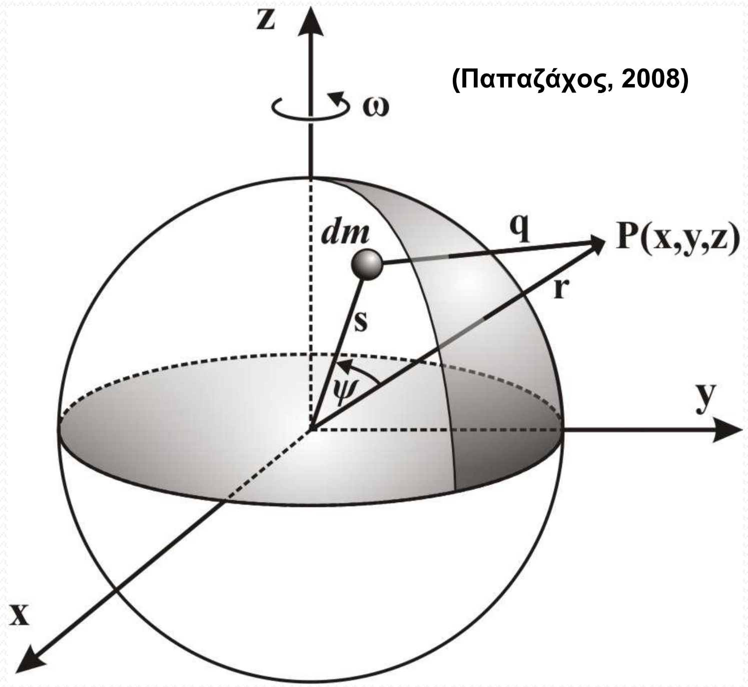


$$I_z = \frac{1}{2} mr^2 \quad I_x = I_y = \frac{1}{4} mr^2$$

Εξωτερικό Πεδίο Βαρύτητας της Γης

$$U_1 = -G\int_0^m \frac{dm}{q} = -G\int_0^M \frac{dm}{r\left(1+\frac{s^2}{r^2}-2\frac{s}{r}\cos\psi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(Παπαζάχος, 2008)



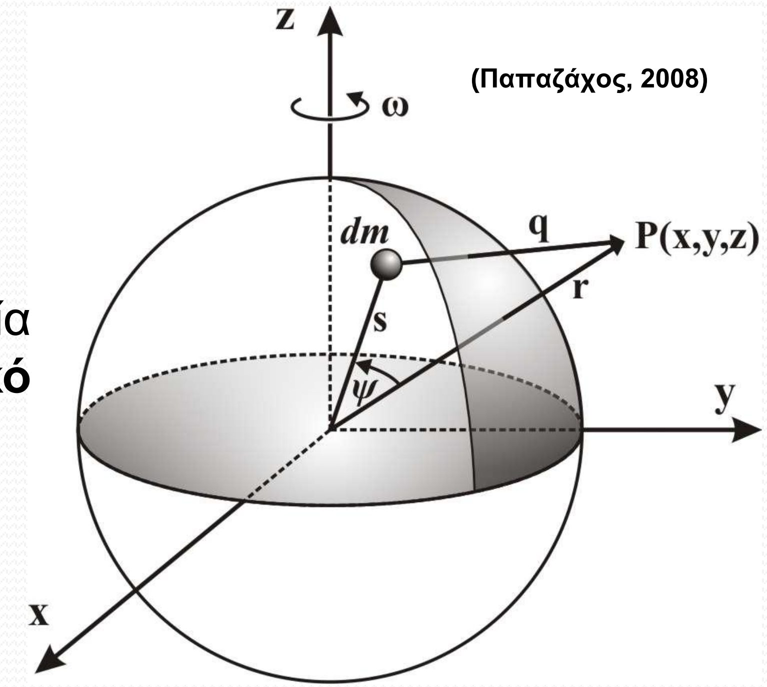
$$U_2 = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\varphi$$

$$U = U_1 + U_2 = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(A+B+C-3I) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\varphi$$

$$C = \int_0^M (x^2+y^2)dm \qquad B = \int_0^M (x^2+z^2)dm$$

$$A = \int_0^M (y^2+z^2)dm \qquad I = \int_0^M (x^2+y^2+z^2)\sin^2\psi\, dm$$

Εξωτερικό Πεδίο Βαρύτητας της Γης



Αν κάνουμε την υπόθεση ότι η Γη έχει συμμετρία εκ περιστροφής (**A = B**), τότε **το ολικό δυναμικό έξω από τη Γή και σε συνάρτηση με το φ**:

$$U = U_1 + U_2 = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(2A + C - 3I) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi$$

Αν ορίσουμε $$H = \frac{C - A}{M}$$

$$U = -G\frac{M}{r}\left[1 + \frac{H}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2GM}\cos^2\varphi\right]$$

Η ποσότητα **Η** ονομάζεται **δυναμική ελλειπτικότητα της Γης** και εκφράζει τη σχετική διαφορά των ροπών αδράνειάς της, ως αποτέλεσμα της πλάτυνσής της στο Ισημερινό.

Είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε ότι λόγω του ότι η πλάτυνση της Γης οφείλεται στη σχεδόν υδροστατική απόκρισή της στην περιστροφή, ισχύει ότι:

$$f = \frac{a-c}{a} \qquad \frac{C-A}{C} \qquad \sim \frac{1}{300}$$

Επίσης, η σχέση αυτή ΟΡΙΖΕΙ και το σχήμα της Γης, αφού ορίζει και τις περιοχές όπου το δυναμικό είναι το ίδιο, όπως συμβαίνει και στην επιφάνεια της θάλασσας.

$$U = -G\frac{M}{r}\left[1 + \frac{H}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2GM}\cos^2\varphi\right]$$

Αν υπολογίσουμε το δυναμικό, U_0, στον Ισημερινό (r=α, φ=0°) και στους πόλους (r=c, φ=90°), τότε έχουμε:

$$U_0 = \text{-}G\frac{M}{a}\left[1 + \frac{H}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM}\right] \qquad U_0 = \text{-}G\frac{M}{c}\left[1 \text{-} \frac{H}{c^2}\right]$$

Εξισώνοντας τις 2 σχέσεις και θεωρώντας ότι:

- $c = \alpha\,(1 - f)$
- Η γεωμετρική πλάτυνση της Γης, f, έχει πολύ μικρές τιμές (~1/300)
- Το H/α^2 έχει ακόμα μικρότερες τιμές (~1/900)

μπορούμε σε πρώτη προσέγγιση να παραλείψουμε όρους f^2, $f\cdot(H/\alpha^2)$, $(H/\alpha^2)^2$ και ανώτερης τάξης, έχουμε:

$$f=\frac{3}{2}\ \frac{H}{a^2}+\frac{1}{2}\ \frac{\omega^2 a^3}{GM}$$

Αν ορίσουμε το λόγο φυγόκεντρου προς βαρύτητα στον Ισημερινό:

$$m=\frac{\omega^2 \alpha}{g_e}=\frac{\omega^2 a}{GM/\alpha^2}=\frac{\omega^2 a^3}{GM}$$

Η σχέση γίνεται:

$$f=\frac{3}{2}\frac{H}{a^2}+\frac{1}{2}m$$

Πλάτυνση (σχέση ημιαξόνων)

$$f=\frac{a-c}{a}$$

Σχέση ροπών αδράνειας

$$\frac{H}{a^2}=\frac{C-A}{Ma^2}$$

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

$$r = a\left[1 - f\sin^2\phi\right] \qquad f = \frac{3}{2}\ \frac{H}{a^2} + \frac{1}{2}m$$

Προσδιορισμός του σχήματος της Γης, σε συνάρτηση με τις **ροπές αδράνειάς** της, **τη μάζα της** και τη **φυγόκεντρο επιτάχυνσή** της

Η σχέση προσδιορισμού της πλάτυνσης μπορεί να γραφεί και ως:

$$\frac{C}{Ma^2} = \frac{\frac{1}{3}(2f - m)}{\left(\frac{C-A}{C}\right)}$$

$$f = \frac{a-c}{a} \qquad \frac{C-A}{C} \qquad m \qquad \sim \frac{1}{300}$$

$$C = \frac{1}{3}Ma^2 \approx \frac{1}{3}MR^2 < \frac{2}{5}MR^2 \quad (\textit{Ροπή αδράνειας ομογενούς σφαίρας})$$

Για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου βαρύτητας χρησιμοποιούμε την προηγούμενη σχέση:

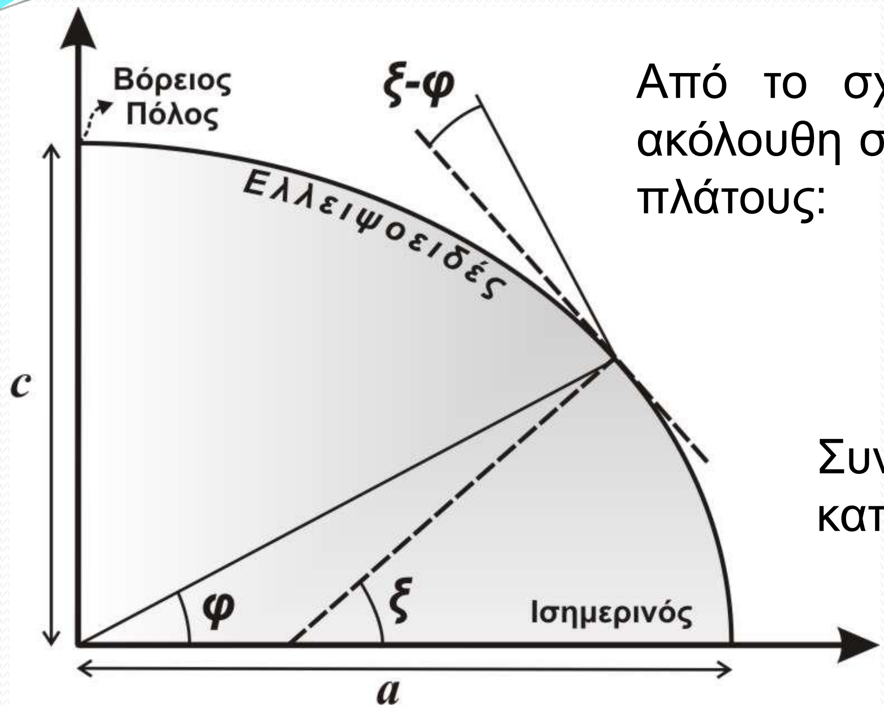
$$g = \left| -\vec{\nabla} U \right| \approx \left| -\frac{\partial U}{\partial r} \right| \qquad U = -G\frac{M}{r}\left[1 + \frac{H}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2GM}\cos^2\varphi\right]$$

$$g = G\frac{M}{r^2}\left[1 + \frac{3H}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) - \frac{\omega^2 r^3}{GM}\cos^2\varphi\right]$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης, μπορούμε να υπολογίσουμε **τη σχετική αύξηση του πεδίου βαρύτητας (*β*)** από τον ισημερινό (g_e) στους πόλους (g_p), με τη φυγόκεντρο (m) και την πλάτυνση της Γης (*f*), γνωστή ως **σχέση του Clairaut.**

$$\beta = \frac{g_p - g_e}{g_e} = \frac{5}{2}m - f$$

Εξίσωση του Σφαιροειδούς



(Παπαζάχος, 2008)

φ: γεωκεντρικό πλάτος
ξ: γεωγραφικό πλάτος

Από το σχήμα μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί η ακόλουθη σχέση μεταξύ γεωγραφικού και γεωκεντρικού πλάτους:

$$\tan\varphi = (1-f)^2 \tan\xi$$

Συνήθως η παραπάνω σχέση μετατρέπεται, κατά προσέγγιση, στην εναλλακτική σχέση:

$$\sin^2\varphi = \sin^2\xi - f\sin^2 2\xi$$

σε συνδυασμό με τη χρήση όρων ανώτερης τάξης οδηγεί στην **εξίσωση του σφαιροειδούς**:

$$r = a\left[1 + f\sin^2\xi + \left(\frac{3}{2}f^2 - \frac{5}{8}fc - \frac{D}{4a^4}\right)\sin^2 2\xi\right]$$

$$r = a\left[1 + f\sin^2\xi + \left(\frac{3}{2}f^2 - \frac{5}{8}fc - \frac{D}{4a^4}\right)\sin^2 2\xi\right]$$

Εύκολα φαίνεται ότι η παραπάνω σχέση (**εξίσωση του σφαιροειδούς**) συμπίπτει με την αντίστοιχη εξίσωση του **ελλειψοειδούς εκ περιστροφής**

$$r = a\left[1 - f\sin^2\xi + \frac{5}{8}fc\cdot\sin^2 2\xi\right]$$

αν τεθεί: $D = a^4 f\left(\frac{7}{2}f - \frac{5}{2}c\right)$

Για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου βαρύτητας, η εφαρμογή της ίδιας προσέγγισης οδηγεί στη σχέση:

$$g = g_e \left[1 + \beta \sin^2 \xi + \left(\frac{1}{8} f^2 - \frac{5}{8} mf \right) \sin^2 2\xi \right]$$

β *είναι η σχετική αύξηση της έντασης του πεδίου* βαρύτητας από τον Ισημερινό στους Πόλους, η οποία στην περίπτωση αυτή δίνεται από τη σχέση :

$$\beta = \frac{g_p - g_e}{g_e} = \frac{5}{2} m - f - \frac{17}{4} mf$$

Σχέση του **Clairaut με όρους 2^{ης} τάξης** ως προς ***f*** *και* ***m***

Μετρήσεις του Πεδίου Βαρύτητας της Γης

Η μόνη θέση όπου η βαρύτητα ήταν αξιόπιστα μετρημένη με εκκρεμές ήταν στο Γεωδαιτικό Ινστιτούτο του Potsdam από το 1906, οπότε βρέθηκε ότι η τιμή της έντασης στο Potsdam είναι **981.2740 Gal**. Η τιμή αυτή θεωρήθηκε ως τιμή αναφοράς του διεθνούς βαρυτομετρικού δικτύου από το **1909** ως το **1971** και οδήγησε στην ακόλουθη σχέση:

$$\gamma_0 = 978.049(1 + 5.2884 \cdot 10^{-3} \sin^2 \xi - 5.90 \cdot 10^{-6} \sin^2 2\xi)$$

Οι ακριβέστερες μετρήσεις της έντασης του πεδίου βαρύτητας οδήγησαν στον προσδιορισμό της ακόλουθης σχέσης **IGF-1967**, που συνδέεται με το γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς **GRS67** :

$$\gamma_0 = 978.0318(1 + 5.3024 \cdot 10^{-3} \sin^2 \xi - 5.87 \cdot 10^{-6} \sin^2 2\xi)$$

Το **1980** η Διεθνής Ένωση Γεωδαισίας αποφάσισε κατά την κατασκευή του ελλειψοειδούς **GRS80** και μετέπειτα του **WGS84** να χρησιμοποιήσει την παρακάτω σχέση, η οποία είναι μεγαλύτερης ακρίβειας:

$$\gamma_0 = 978.03267715 \frac{(1 + 1.931851353 \cdot 10^{-3} \sin^2 \xi)}{\sqrt{1 - 6.69438002290 \cdot 10^{-3} \sin^2 \xi}}$$

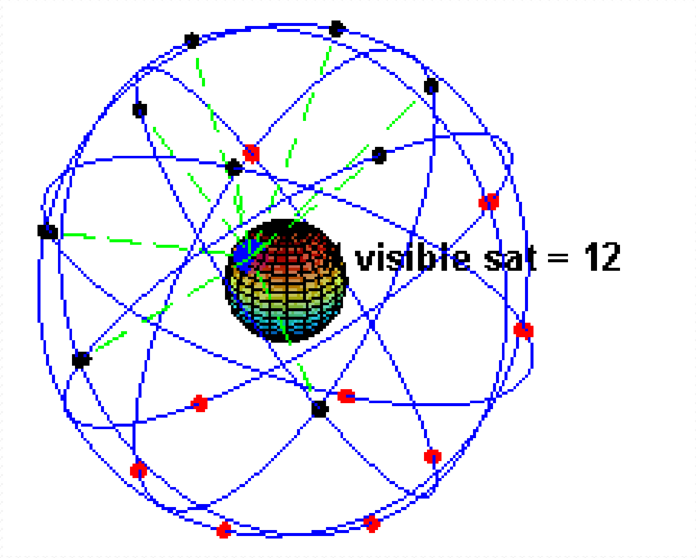
Ελλειψοειδές WGS84

$$\gamma_0 = 978.03267715 \frac{(1+1.931851353 \cdot 10^{-3} \sin^2 \xi)}{\sqrt{1-6.69438002290 \cdot 10^{-3} \sin^2 \xi}}$$

Ελλειψοειδές	Ισημερινός άξονας (α)	Πολικός άξονας (c)	Αντίστροφη Πλάτυνση 1/f
WGS (1984)	6378137	6356752	298.257224

$$f_{WGS84} \approx \frac{1}{298.257}$$

$$f_{ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ} = \frac{1}{299.627}$$



Βάση για το ***Παγκόσμιο Δορυφορικό Σύστημα Εντοπισμού Θέσης (GPS)***