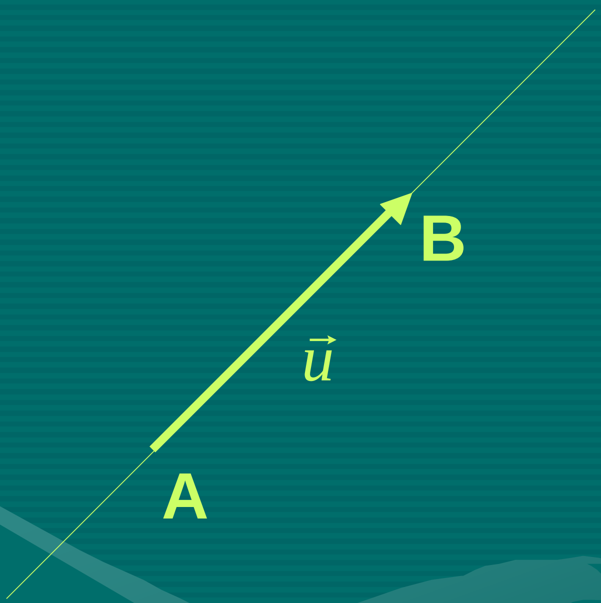
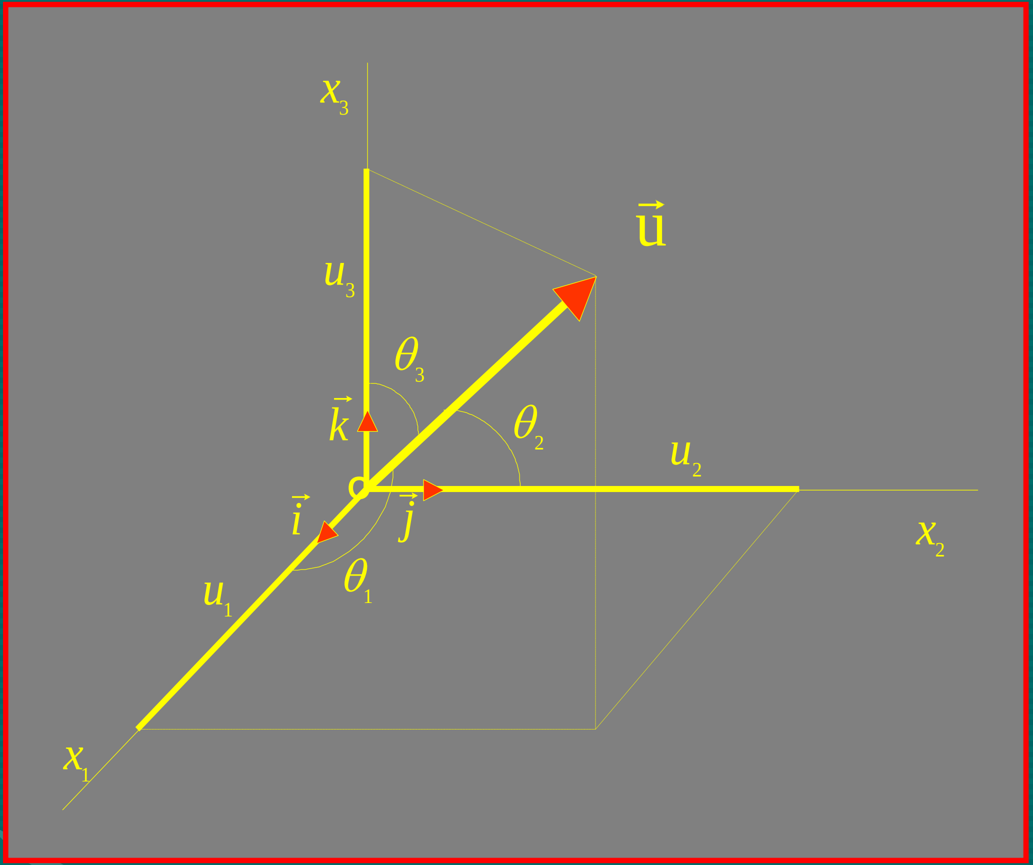
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ



Μέτρο
Διεύθυνση
Κατεύθυνση (φορά)
Σημείο Εφαρμογής

Διανυσματικά Μεγέθη :
μετάθεση, ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη

Μονόμετρα Μεγέθη :
χρόνος, μάζα, όγκος, θερμοκρασία, πίεση, πυκνότητα



Κατευθύνοντα συνημίτονα:

$\alpha_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_1$, $\alpha_2 = \sigma\upsilon\nu\theta_2$, $\alpha_3 = \sigma\upsilon\nu\theta_3$

συνιστώσες : u_1 , u_2 , u_3

<u>Παράσταση διανύσματος</u>

α) Μέτρο : u, (u), $|u|$ και

κατευθύνοντα συνημίτονα

β) συνιστώσες : u_1, u_2, u_3

$$\vec{u} = u(u_1, u_2, u_3), \quad \vec{u} = u_i, \; i = 1, 2, 3$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

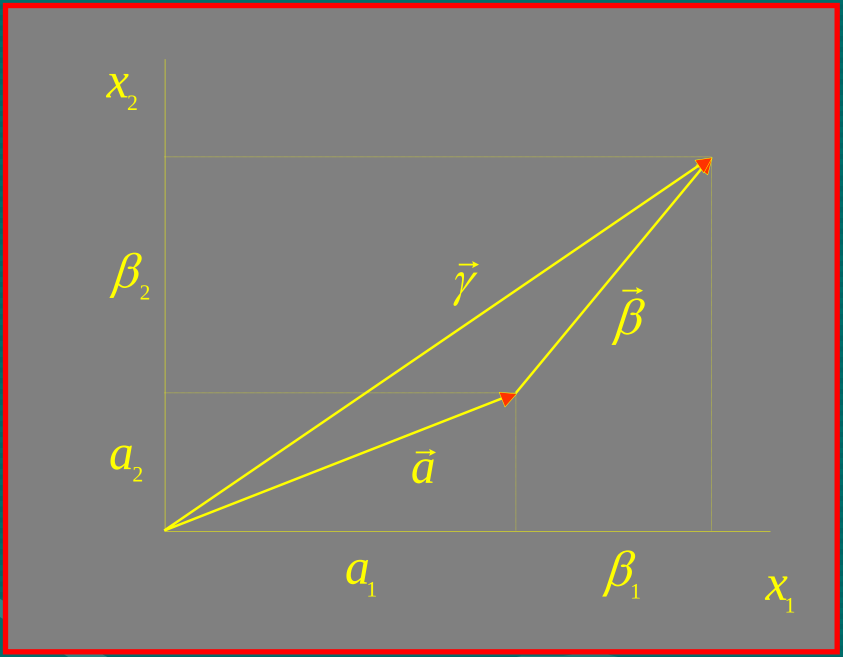
$$\vec{u} = \vec{i}\,u_1 + \vec{j}\,u_2 + \vec{k}\,u_3$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, μοναδιαία διανύσματα

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad \alpha_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{u_1}{u}, \qquad \alpha_2 = \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{u_2}{u}, \qquad \alpha_3 = \sigma\upsilon\nu\theta_3 = \frac{u_3}{u}$$

1. Πράξεις Διανυσμάτων

1.1 Πρόσθεση Διανυσμάτων



$$\vec{\alpha} = \vec{i}\alpha_1 + \vec{j}\alpha_2 + \vec{k}\alpha_3$$

$$\vec{\beta} = \vec{i}\beta_1 + \vec{j}\beta_2 + \vec{k}\beta_3$$

Διανυσματικό (γεωμετρικό) άθροισμα :

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{i}\gamma_1 + \vec{j}\gamma_2 + \vec{k}\gamma_3$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2$$

$$\gamma_3 = \alpha_3 + \beta_3$$

Αντίθετο του : $-\vec{u}$ (ίδιο μέτρο, αντίθετη φορά)

1.2 Αφαίρεση διανυσμάτων

$\Rightarrow$ Πρόσθεση του αντιθέτου

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$

$\gamma_1=\alpha_1-\beta_1$, $\gamma_2=\alpha_2-\beta_2$, $\gamma_3=\alpha_3-\beta_3$

Ίσα διανύσματα;

1.3 Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

α) <u>Εσωτερικό Γινόμενο (dot product)</u>

<u>(μονόμετρο μέγεθος)</u>

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\sigma\upsilon\nu\phi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

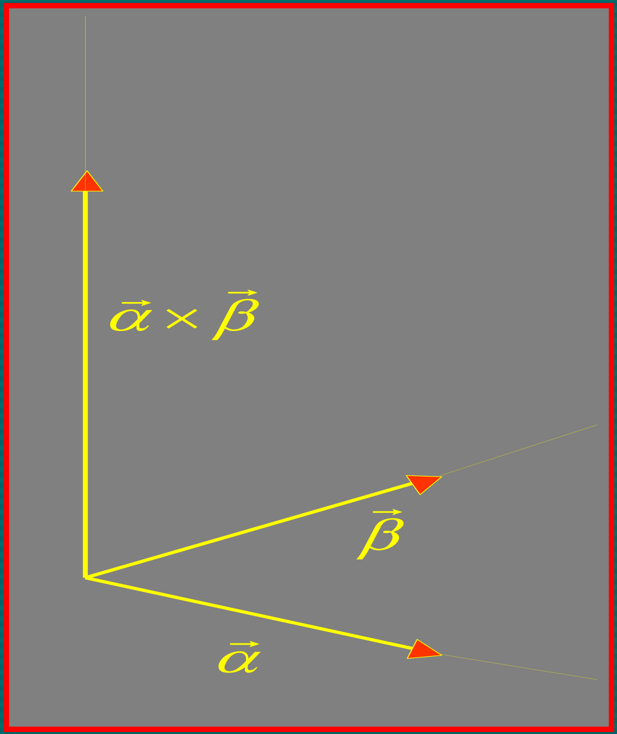
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = ?$$

$$\rightarrow \quad W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$\rightarrow \quad \Pi = \vec{u} \cdot \vec{S}$$

$$\rightarrow \quad \Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

β) Εξωτερικό Γινόμενο (vector/cross/outer product)
(διανυσματικό μέγεθος)



$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\times\vec{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right| = \alpha\beta\eta\mu\varphi$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \vec{j}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \vec{k}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

$\rightarrow \quad \vec{M} = \vec{F}\times\vec{s}$

$\rightarrow \quad \vec{S} = \vec{B}\times\vec{h}$

$\rightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{\upsilon}\times\vec{r}$

$\vec{\alpha} \times \vec{\alpha} = ?$

γ) Δυαδικό γινόμενο (τανυστικό γινόμενο-dyadic product)

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3, \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j e_j = \vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3$$

Το δυαδικό γινόμενο (dyadic product) παρουσιάζεται ως τετραγωνικός πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του $\vec{a}$ ως διάνυσμα κολώνα (**column vector**) με το $\vec{b}$ ως διάνυσμα σειρά (**row vector**).

$$\square = \vec{a} \otimes \vec{b} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

$$\square = \vec{a} \otimes \vec{b} =$$

$$= \vec{i}a_1\vec{i}b_1 + \vec{i}a_1\vec{j}b_2 + \vec{i}a_1\vec{k}b_3 + \vec{j}a_2\vec{i}b_1 + \vec{j}a_2\vec{j}b_2 + \vec{j}a_2\vec{k}b_3 + \vec{k}a_3\vec{i}b_1 + \vec{k}a_3\vec{j}b_2 + \vec{k}a_3\vec{k}b_3$$

9 συσιστώσες => μέγεθος μονόμετρο; διανυσματικό;

ΔΥΑΔΙΚΗ ΟΝΤΟΤΗΤΑ => **Τανυστής β΄ Τάξης**

Εφαρμογή 1.2

Δίνονται τα δύο διανύσματα $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

Να βρεθούν το γεωμετρικό τους άθροισμα, η γεωμετρική τους διαφορά, το εσωτερικό, εξωτερικό και δυαδικό τους γινόμενο

$$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 6 - 3 = -7$$

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = 2\vec{i}\vec{i} - 4\vec{i}\vec{j} + 6\vec{i}\vec{k} + 3\vec{j}\vec{i} - 6\vec{j}\vec{j} + 9\vec{j}\vec{k} - \vec{k}\vec{i} + 2\vec{k}\vec{j} - 3\vec{k}\vec{k}$$

Λογισμός Διανυσμάτων

- **Μονόμετρες συναρτήσεις** (π.χ. χρόνος, πυκνότητα, θερμοκρασία)
 (μεταβολές μονόμετρων ποσοτήτων στο χώρο ή το χρόνο)

- **Διανυσματικές συναρτήσεις** (π.χ. ένταση πεδίου βαρύτητας)
 (μεταβολές διανυσματικών ποσοτήτων στο χώρο ή το χρόνο)

1. Διαφορικός Λογισμός Διανυσμάτων

παραγώγιση διανυσματικής ποσότητας ως προς μονόμετρη ποσότητα

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{i}\,\frac{du_1}{dt} + \vec{j}\,\frac{du_2}{dt} + \vec{k}\,\frac{du_3}{dt}$$

ΤΕΛΕΣΤΕΣ

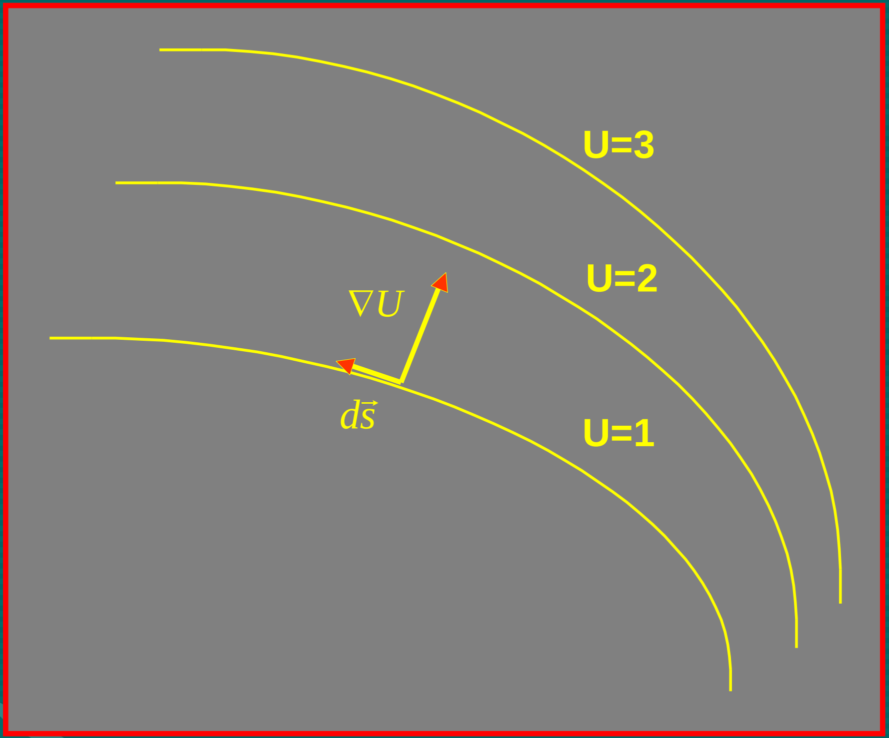
Σύμβολα μπροστά από διανυσματικές ή μονόμετρες συναρτήσεις
που υποδεικνύουν πραγματοποίηση πράξεων παραγώγισης

α) <u>Διανυσματικός τελεστής ανάδελτα (nabla), ∇</u> ***(ΔΙΑΝΥΣΜΑ)***

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial x_3}$$

Εφαρμόζεται σε μονόμετρες και διανυσματικές συναρτήσεις

β) Τελεστής βαθμίδα, grad (ΔΙΑΝΥΣΜΑ)



$$\vec{g} = \mathrm{grad}U = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial x_2} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial x_3}$$

U=μονόμετρη ποσότητα

grad U = ∇U

Η **βαθμίδα μεταβολής του υψομέτρου** σε ένα σημείο μιας πλαγιάς είναι **διάνυσμα κάθετο στην ισοϋψή** στο σημείο αυτό και περιγράφει την τοπογραφική κλίση στο σημείο αυτό.

γ) Τελεστής απόκλιση, div (ΜΟΝΟΜΕΤΡΗ)

$$\theta = div\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Εφαρμόζεται σε διάνυσμα – προκύπτει μονόμετρη

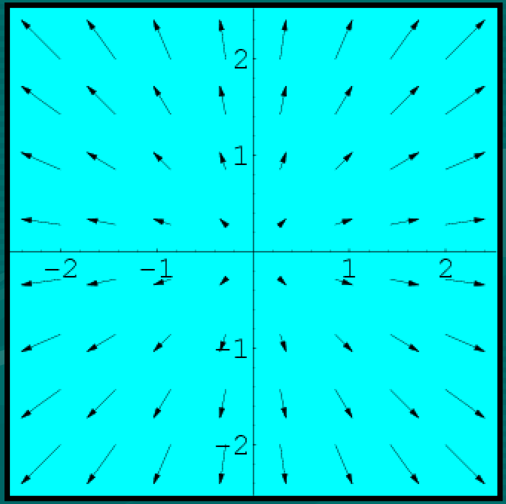
$$\mathrm{div}\vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \left(\vec{i}u_1 + \vec{j}u_2 + \vec{k}u_3 \right) =$$

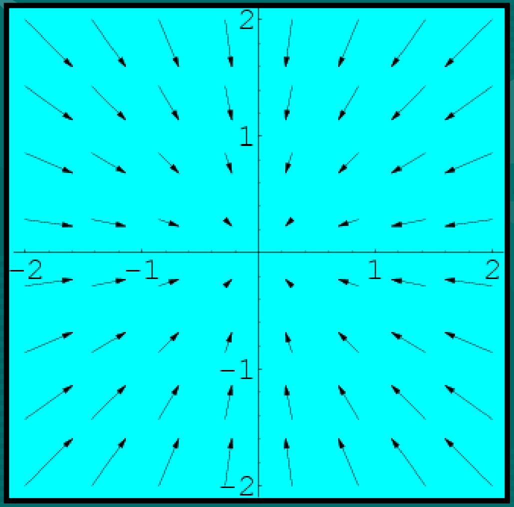
$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Αν $\nabla \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow$ **Σωληνοειδές διάνυσμα**

Αν θεωρήσουμε έναν **ιδεατό χώρο** μέσα στον οποίο πραγματοποιείται ροή ρευστού. Έστω ότι η $\vec{F}(x, y, z)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα του ρευστού στη θέση (x, y, z) του χώρου αυτού. **Απόκλιση** της $\vec{F}$ είναι η μεταβολή της στο χώρο.

Αν το υγρό κινείται προς τα έξω (π.χ. υπάρχουν πηγές μέσα στον ιδεατό χώρο που μελετούμε) τότε η τιμή $div\ \vec{F}$ είναι θετική και περιγράφει ποσοτικά αυτήν την διόγκωση (κίνηση προς τα έξω, εκκροή από τον ιδεατό χώρο).





Αντίθετα, αν η κίνηση του υγρού είναι προς τα μέσα (π.χ. υπάρχει συνεχής τροφοδοσία από έξω προς τα μέσα και κατανάλωση ρευστού στο εσωτερικό του ιδεατού χώρου) τότε η τιμή $div\ \vec{F}$ είναι αρνητική.

δ) Τελεστής περιστροφή, rot ή curl (ΔΙΑΝΥΣΜΑ)

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\vec{u} = \mathrm{curl}\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

Αν το διάνυσμα περιγράφει την ταχύτητα κίνησης ενός υγρού σε ένα ιδεατό χώρο, η διανυσματική συνάρτηση $curl\,\vec{u}$ περιγράφει το στροβιλισμό του υγρού μέσα στο χώρο αυτό

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

$$\text{Αν} \quad \nabla \times \vec{u} = 0 \Rightarrow \textbf{Αστρόβιλο διάνυσμα}$$

ε) Τελεστής λαπλασιανή, ∇^2 (ΜΟΝΟΜΕΤΡΗ – ΔΙΑΝΥΣΜΑ)

$$\Phi = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}$$

Εφαρμογή σε μονόμετρη (U)

$$\nabla^2 \vec{u} = \vec{i}\,\nabla^2 u_1 + \vec{j}\,\nabla^2 u_2 + \vec{k}\,\nabla^2 u_3$$

Εφαρμογή σε διανυσματική $(\vec{u})$

Φυσική σημασία: ***η εφαρμογή της σε μια ποσότητα δείχνει τη μεταβολή της τιμής της ποσότητας από ένα σημείο σε ένα γειτονικό του.***

$$\nabla^2 U = |U - U_0|, \quad \acute{o}\pi o \upsilon$$

U_0 = τιμή ποσότητας στο σημείο 0

U = » » στη γειτονιά του σημείου 0

Εφαρμογή 1.3

Δίνεται η μονόμετρη συνάρτηση: $U = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2$
Να βρεθούν η βαθμίδα (grad) και η λαπλασιανή της (∇^2*) στο σημείο (0, 1, -1)*

$$\mathrm{grad}\,U = \nabla U = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial x_2} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial x_3} =$$

$$= \vec{i}(2x_1) + \vec{j}(4x_2) + \vec{k}(-6x_3) = 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = 2 + 4 - 6 = 0$$

Σε κάθε σημείο

Εφαρμογή 1.4

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{u}(x_1, 2x_1x_2x_3, -x_1^2x_2^2x_3)$
Να βρεθούν η απόκλιση (div), η περιστροφή (rot ή curl) και η λαπλασιανή της (∇^2*)*
στο σημείο (1, -2, -1)

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 1 + 2x_1x_3 - x_1^2x_2^2 = -5$$

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{curl}\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \vec{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) =$$

$$= \vec{i}(-2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2) + \vec{j}(2x_1x_2^2x_3) + \vec{k}(2x_2x_3) = 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\nabla^2\vec{u} = \vec{i}\nabla^2u_1 + \vec{j}\nabla^2u_2 + \vec{k}\nabla^2u_3 =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_1}{\partial x_3^2}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_2}{\partial x_3^2}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_3}{\partial x_3^2}\right) =$$

$$= 0 + 0 + \vec{k}(-2x_2^2x_3 - 2x_1^2x_3) = -2x_3(x_2^2 + x_1^2)\vec{k} = 10\vec{k}$$

Άσκηση 1.1

$$\vec{a}(2, 3, -1), \quad \vec{b}(-1, 4, 1)$$

α) μέτρα, κατευθύνοντα συνημίτονα, γωνίες με τους άξονες

β) άθροισμα, διαφορά

γ) εσωτερικό, εξωτερικό, δυαδικό γινόμενο

$$a = \sqrt{4+9+1} = 3.74$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{2}{3.74} \Rightarrow \theta_1 = 57.7^0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{3}{3.74} \Rightarrow \theta_2 = 36.7^0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_3 = -\frac{1}{3.74} \Rightarrow \theta_3 = 105.5^0$$

$$b = \sqrt{1+16+1} = 4.24$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = -\frac{1}{4.24} \Rightarrow \theta_1 = 103.6^0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{4}{4.24} \Rightarrow \theta_2 = 19.5^0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_3 = \frac{1}{4.24} \Rightarrow \theta_3 = 76.4^0$$

$$\vec{a}(2,3,-1) + \vec{b}(-1,4,1) = \vec{\gamma}(1,7,0), \quad \vec{a}+\vec{b} = (2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}) + (-\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}) = \vec{i}+7\vec{j}$$

$$\vec{a}(2,3,-1) - \vec{b}(-1,4,1) = \vec{\delta}(3,-1,-2), \quad \vec{a}-\vec{b} = (2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}) - (-\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}) = 3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-1) + 3\cdot 4 + (-1)\cdot 1 = 9 \qquad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = -2\vec{i}\vec{i} + 8\vec{i}\vec{j} + 2\vec{i}\vec{k} - 3\vec{j}\vec{i} + 12\vec{j}\vec{j} + 3\vec{j}\vec{k} + \vec{k}\vec{i} - 4\vec{k}\vec{j} - \vec{k}\vec{k}$$

Άσκηση 1.2

Δίνεται μονόμετρη συνάρτηση $\Phi = x_1^2 x_2 + x_2^3 x_3 - x_1 x_2 x_3$.

*Να βρεθούν η βαθμίδα (*grad*) και η λαπλασιανή της (* ∇^2 *) στο σημείο (1, 2, 0)*

$$\mathrm{grad}\Phi = \nabla\Phi = \vec{i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \vec{k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} =$$

$$= (2x_1x_2 - x_2x_3)\vec{i} + (x_1^2 + 3x_2^2x_3 - x_1x_3)\vec{j} + (x_2^3 - x_1x_2)\vec{k} =$$

$$= 4\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 2x_2 + 6x_2x_3 = 4$$

Άσκηση 1.3

Δίνεται διανυσματική συνάρτηση $\vec{u} = \vec{i}x_1x_2^2 + \vec{j}x_1x_2x_3 + \vec{k}x_2x_3^2$

Να βρεθούν η απόκλιση (div), η περιστροφή (rot ή curl) και η λαπλασιανή της (∇^2*) στο σημείο (1, 1, -1)*

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = x_2^2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 = -2$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1x_2^2 & x_1x_2x_3 & x_2x_3^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial x_2x_3^2}{\partial x_2} - \frac{\partial x_1x_2x_3}{\partial x_3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial x_1x_2^2}{\partial x_3} - \frac{\partial x_2x_3^2}{\partial x_1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial x_1x_2x_3}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1x_2^2}{\partial x_2}\right) =$$

$$= \vec{i}(x_3^2 - x_1x_2) + \vec{j}(0) + \vec{k}(x_2x_3 - 2x_1x_2) = -3\vec{k}$$

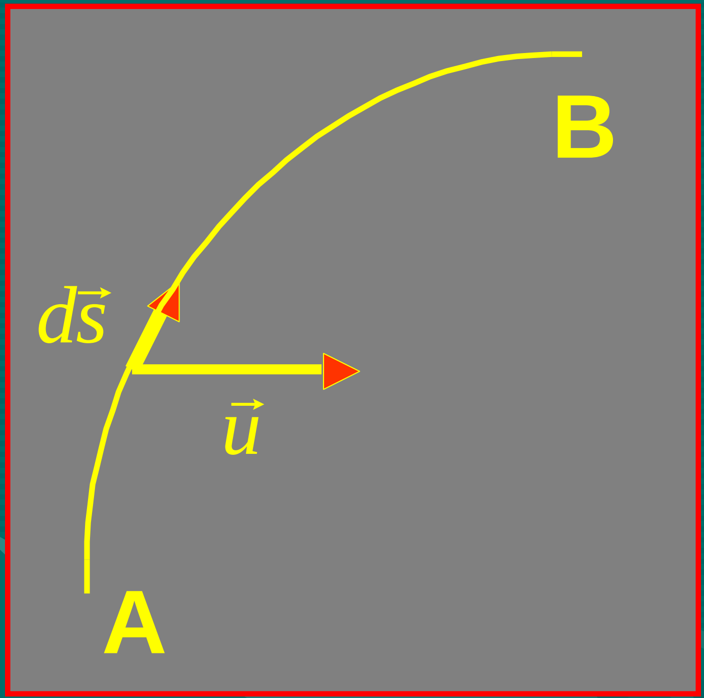
$$\nabla^2\,\vec{u} = \vec{i}\nabla^2u_1 + \vec{j}\nabla^2u_2 + \vec{k}\nabla^2u_3 =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_1}{\partial x_3^2}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_2}{\partial x_3^2}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_3}{\partial x_3^2}\right) =$$

$$= \vec{i}\,2x_1 + \vec{k}\,2x_2 = 2\vec{i} + 2\vec{k}$$

2. Ολοκληρωτικός Λογισμός Διανυσμάτων

α) Απλό Ολοκλήρωμα Διανύσματος

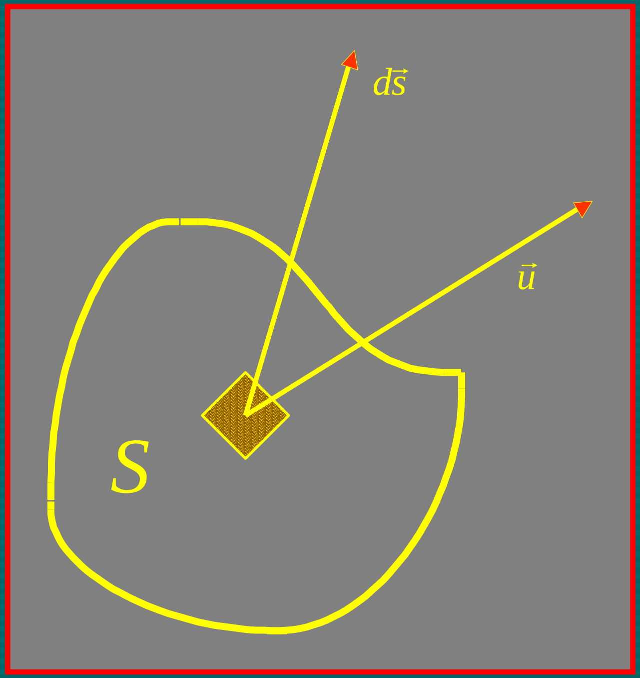


$$W = \int_A^B \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3)$$

u_1, u_2, u_3 συνιστώσες του διανύσματος $\vec{u}$
dx_1, dx_2, dx_3 συνιστώσες του διανύσματος $d\vec{s}$

π.χ. έργο

β) Διπλό Ολοκλήρωμα Διανύσματος



$$\iint_S \vec{u}\cdot d\vec{S} = \iint_S (u_1 dS_1 + u_2 dS_2 + u_3 dS_3)$$

εσωτερικό γινόμενο

u_1, u_2, u_3 συνιστώσες του διανύσματος $\vec{u}$
dS_1, dS_2, dS_3 συνιστώσες του διανύσματος $d\vec{S}$

$d\vec{S} \perp S$

Αν $\vec{u} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{u}\cdot d\vec{S} = |u|.|dS|.\cos 90 = 0$

π.χ. *αν* $\vec{u}$ *η ένταση ενός ηλεκτρικού/μαγνητικού πεδίου το διπλό ολοκλήρωμα είναι η ηλεκτρική/μαγνητική ροή του πεδίου δια μέσου της επιφάνειας* $\vec{S}$

γ) Τριπλό Ολοκλήρωμα Διανύσματος

$$\iiint_V \vec{u}\,dV = \vec{i}\iiint_V u_1\,dV + \vec{j}\iiint_V u_2\,dV + \vec{k}\iiint_V u_3\,dV$$

$$\frac{\iiint_V \vec{u}\,dV}{V} =$$ Μέση τιμή του διανύσματος στο χώρο του όγκου ***V***

Θεώρημα της απόκλισης (Θεώρημα Gauss)

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{u}\; dV = \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

Το τριπλό ολοκλήρωμα της απόκλισης διανυσματικής συνάρτησης σε όγκο ***V*** ισοδυναμεί με

Το διπλό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης στην επιφάνεια ***S*** που περιβάλλει τον ***V***

*π.χ. Ο ρυθμός απόκλισης υγρού από όγκο **V** ιδεατού δοχείου = ρυθμό εκροής του από την επιφάνεια **S** που περιβάλλει τον όγκο (δοχείο)*

Θεώρημα του Stokes

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{u} \right) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Το διπλό ολοκλήρωμα της περιστροφής διανύσματικής συνάρτησης σε επιφάνεια **S** ισοδυναμεί με

Το απλό κλειστό ολοκλήρωμα της διανύσματικής συνάρτησης στη γραμμή **s** που περιβάλλει την **S**

π.χ. Στροβιλισμός υγρού σε επιφάνεια **S** *ισοδυναμεί με το μέσο στροβιλισμό υγρού κατά μήκος της γραμμής,* **s***, που περιβάλλει την επιφάνεια* **S***.*

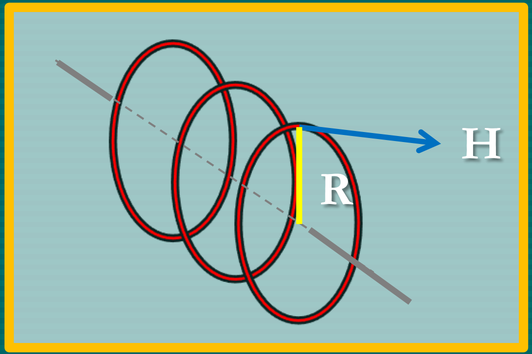
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.5

*Ευθύγραμμος ηλεκτρικός αγωγός ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα έντασης **i** δημιουργεί μαγνητικό πεδίο έντασης **H** (σε απόσταση **r** από τον αγωγό) η οποία εφάπτεται κύκλου ακτίνας **r** και έχει μέτρο ίσο με **ki/r**, όπου **k** σταθερά. Να βρεθεί το απλό ολοκλήρωμα της έντασης κατά μήκος περιφέρειας κύκλου που έχει το κέντρο του στον αγωγό και ακτίνα **R**.*

Έστω στοιχειώδες μήκος $d\vec{s}$ πάνω στον κύκλο. Τότε :

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = \oint \left(\frac{ki}{R} ds \cdot \cos 0 \right) = \frac{ki}{R} \oint ds = \frac{ki}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi ki$$

(εσωτερικό γινόμενο) => H·ds·cos(0)=H·ds



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.6

*Η ένταση, **E**, του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο που απέχει απόσταση **r** από ηλεκτρικό φορτίο **q** <u>έχει τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει το φορτίο με το σημείο</u>(1) και μέτρο που δίνεται από τη σχέση **E=kq/r**^{2}. Να βρεθεί η ηλεκτρική ροή που περνάει από την επιφάνεια σφαίρας που έχει κέντρο το φορτίο **q** και ακτίνα **R.***

---

(1) => διεύθυνση της **E** // διεύθυνση ακτίνων **R** =>

Ηλεκτρική ροή: $\vec{E}\cdot d\vec{S} = |E|\cdot|dS|\cdot\cos 0 = |E|\cdot|dS|$

όπου $d\vec{S}$ στοιχείο της επιφάνειας της σφαίρας.

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{kq}{R^2}dS = \frac{kq}{R^2}\iint_S dS = \frac{kq}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi kq$$

Άρα η συνολική ροή είναι ανεξάρτητη της επιφάνειας.

Τανυστές

Τανυστής ***n*** *τάξης* στο χώρο των ***r*** διαστάσεων:

- ***r*** ^{n} συνιστώσες,
- κατά την αλλαγή των αξόνων υπακούει σε ορισμένο μετασχηματισμό

- *τανυστές 0ής τάξης*, **$r^0=3^0=1$** $\rightarrow$ ***μονόμετρα μεγέθη***
- *τανυστές 1ης τάξης*, **$r^1=3^1=3$** $\rightarrow$ **διανυσματικά μεγέθη**
- *τανυστές 2ης τάξης*, **$r^2=3^2=9$** $\rightarrow$ **τάση, ανηγμένη παραμόρφωση**

S_{ij}, $i,j=1,2,3$

Ιδιότητες Τανυστών Δεύτερης Τάξης

Α) ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow S_{12} = S_{21}, \quad S_{23} = S_{32}, \quad S_{13} = S_{31} \qquad \text{π.χ.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Β) ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΕΑΣ/ΣΤΡΟΦΕΑΣ)

$$S_{ij} = -S_{ji} \Rightarrow \begin{cases} S_{12} = -S_{21}, \quad S_{23} = -S_{32}, \quad S_{13} = -S_{31} \\ S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0 \end{cases} \qquad \text{π.χ.} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Γ) ΙΣΟΤΡΟΠΟΣ

$$S_{11} = S_{22} = S_{33}, \quad S_{12} = S_{21} = S_{23} = S_{32} = S_{13} = S_{31} \qquad \text{π.χ.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Στους **ισότροπους τανυστές** οι άξονες θεωρούνται **ισοδύναμοι**.
Εναλλαγή των αξόνων δεν επηρεάζει τις τιμές των συνιστωσών

Ίχνος τανυστή : $S_{11} + S_{22} + S_{33}$

Τανυστής = Συμμετρικός (με ίδιο ίχνος) + Αντισυμμετρικός (1)

Τανυστής = Ισότροπος (με ίδιο ίχνος) + Τανυστής (με μηδενικό ίχνος)

Συμμετρικός τανυστής = Ισοτροπέας + Εκτροπέας (2)

(1) Λ (2) => ***Τανυστής = Ισοτροπέας + Εκτροπέας + Αντισυμμετρικός***

Τανυστής Kroneker, δ_{ij}

$$\delta_{\mathrm{ij}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

για $i=j$ $\delta_{ij}=1$, για $i \neq j$ $\delta_{ij}=0$

Εφαρμογή 1.7

Δίνεται ο τανυστής 2ης τάξης :

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 8 & 3 & 11 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Να αναλυθεί σε άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή

$$S_{ij}^{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 \\ y_1 & 3 & y_3 \\ y_2 & y_3 & 8 \end{pmatrix} \qquad S_{ij}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & -x_2 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lr} x_1 + y_1 = 8 & (1) \\ x_2 + y_2 = 5 & (2) \\ y_1 - x_1 = 4 & (3) \\ y_2 - x_2 = -5 & (4) \\ y_3 - x_3 = 11 & (5) \\ x_3 + y_3 = -7 & (6) \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (1)+(3) \Rightarrow y_1 = 6 \\ (1) \Rightarrow x_1 = 2 \\ (5)+(6) \Rightarrow y_3 = 2 \\ (6) \Rightarrow x_3 = -9 \\ (2)+(4) \Rightarrow y_2 = 0 \\ (2) \Rightarrow x_2 = 5 \end{array}\right|$$

Εφαρμογή 1.8

Να αναλυθεί σε άθροισμα ενός ισοτροπέα και ενός εκτροπέα

$$S_{ij}^{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Ισότροπος → ομόλογα στοιχεία ίσα, ίδιο ίχνος με αρχικό

Στοιχεία διαγωνίου = (1+3+8)/3 = 4

$$S_{ij}^{\iota\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S_{ij}^{\sigma} = S_{ij}^{\iota\sigma} + S_{ij}^{\varepsilon\kappa} \Rightarrow S_{ij}^{\varepsilon\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{ij}^{\varepsilon\kappa} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Άρα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 1.4

Δίνεται διανυσματική συνάρτηση $\vec{u} = \vec{i}(x_1 - 1) - \vec{j}x_2$

Να αποδειχθεί ότι είναι αστρόβιλη $(\mathrm{rot}\vec{u} = 0)$ *και* $\oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = 0$

$$\mathrm{rot}\,\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = \vec{i}(0) + \vec{j}(0) + \vec{k}(0) = 0$$

Θεώρημα Stokes: $$\oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\underbrace{\nabla \times \vec{u}}_{0}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Άσκηση 1.5

Δίνεται διανυσματική συνάρτηση $\vec{u} = \vec{i}(x_1 - 1) - \vec{j}x_2$

Να αποδειχθεί ότι είναι σωληνοειδής (div $\vec{u} = 0$*) και* $\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 1 - 1 = 0$$

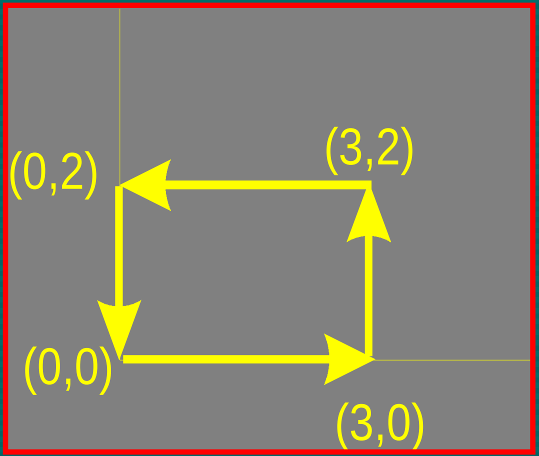
=> Σωληνοειδής

Θεώρημα της απόκλισης (θεώρημα GAUSS)

$$\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \underbrace{(\nabla \cdot \vec{u})}_{0} dV = 0$$

Άσκηση 1.6

Να υπολογιστεί το απλό ολοκλήρωμα του διανύσματος $\vec{u} = \vec{i}x_1 + \vec{j}x_2$
κατά μήκος της διαδρομής (0,0) → (3,0) → (3,2) → (0,2) → (0,0)



$$A = \int_{(a,b)}^{(c,d)} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_{(a,b)}^{(c,d)} x_1.dx_1 + \int_{(a,b)}^{(c,d)} x_2.dx_2 = \left.\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right|_{(a,b)}^{(c,d)}$$

$$(0,0) \to (3,0) \Rightarrow A_1 = \left(\frac{9}{2} + \frac{0}{2} - \frac{0}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

$$(3,0) \to (3,2) \Rightarrow A_2 = \left(\frac{9}{2} + \frac{4}{2} - \frac{9}{2} - \frac{0}{2}\right) = 2$$

$$(3,2) \to (0,2) \Rightarrow A_3 = \left(\frac{0}{2} + \frac{4}{2} - \frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$(0,2) \to (0,0) \Rightarrow A_4 = \left(\frac{0}{2} + \frac{0}{2} - \frac{0}{2} - \frac{4}{2}\right) = -2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{9}{2} + 2 - \frac{9}{2} - 2 = 0$$

Άσκηση 1.8

Να βρεθούν τα ίχνη ενός α) στροφέα, β) εκτροπέα, γ) ισοτροπέα με ένα διαγώνιο στοιχείο -4

α) Στροφέας (αντισυμμετρικός): $S_{ij} = -S_{ji} \Rightarrow S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0 \Rightarrow$ ίχνος = 0

β) Συμμετρικός = ισοτροπέας + εκτροπέας

↓

Ισότροπος τανυστής με ίχνος ίσο με του αρχικού και στοιχεία διαγωνίου ίσα

Άρα, ίχνος εκτροπέα = 0

γ) Ισοτροπέας $\Rightarrow$ στοιχεία διαγωνίου ίσα, κ=-4 $\Rightarrow$ ίχνος = 3.(-4) = -12