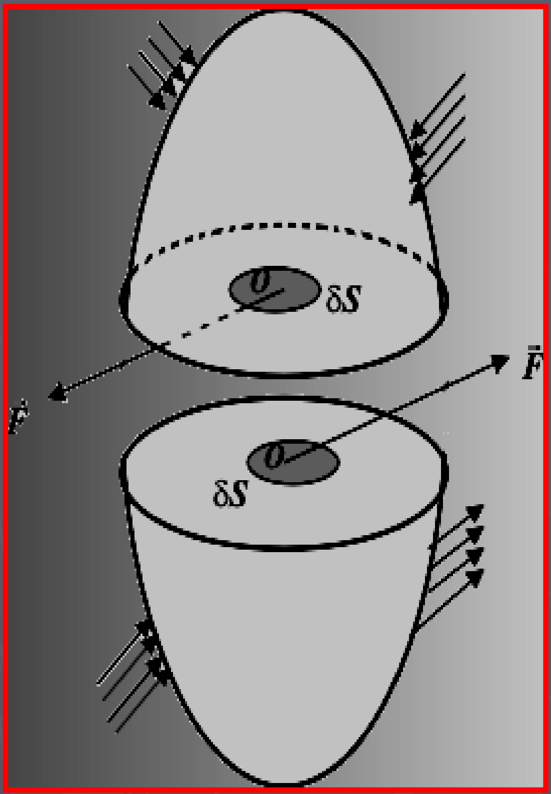
Τάση



Επίδραση εξωτερικών δυνάμεων ➔ σώμα σε ισορροπία Συνισταμένη ***F = 0*** (στο ***Ο***).

Υλικό χώρου γύρω από ***Ο*** σε ***εντατική κατάσταση***

Ποιες δυνάμεις ασκούνται στο στοιχείο του σώματος που περιβάλλει το Ο ;

δS = στοιχειώδης επιφάνεια

F = συνισταμένες δυνάμεις που ασκεί το ένα τμήμα του σώματος στο άλλο

Οι δυνάμεις είναι ίσες & αντίθετες (νόμος δράσης – αντίδρασης)

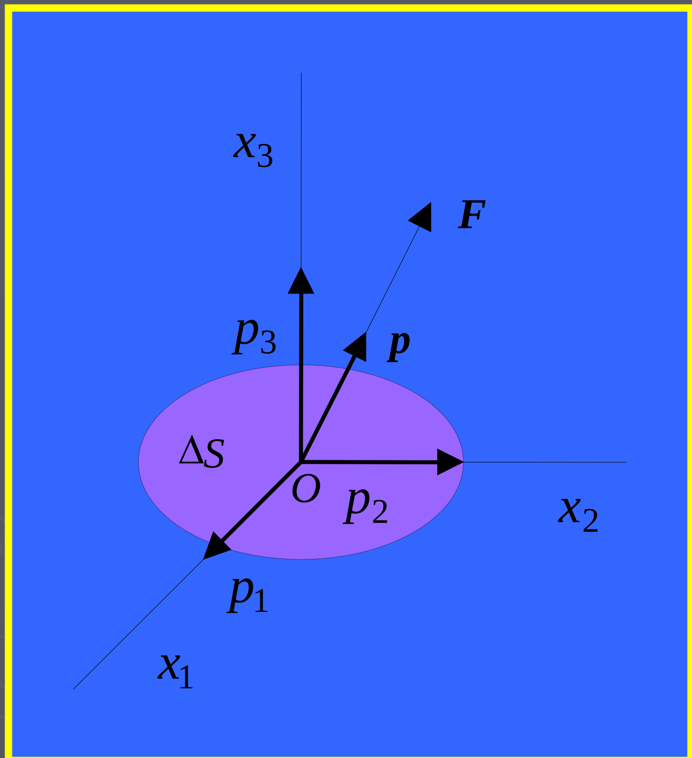
Άρα αρκεί η μελέτη της μιας (F)

F = f (προσανατολισμός δS, εμβαδόν δS)

Σκοπός : Μελέτη αιτίου της ***εντατικής κατάστασης στο Ο ανεξάρτητα της S*** $\Rightarrow$

μελετάμε ***F / μονάδα επιφάνειας*** = ***ΤΑΣΗ*** = ανεξάρτητη εμβαδού δS.

Διάνυσμα Τάσης



Διάνυσμα τάσης στο Ο ως προς ΔS :

$$\vec{p} = \frac{\vec{F}}{\Delta S} \quad \text{όταν} \quad \Delta S \to 0$$

$\vec{p} \to \vec{p}_1$ πάνω στη ΔS

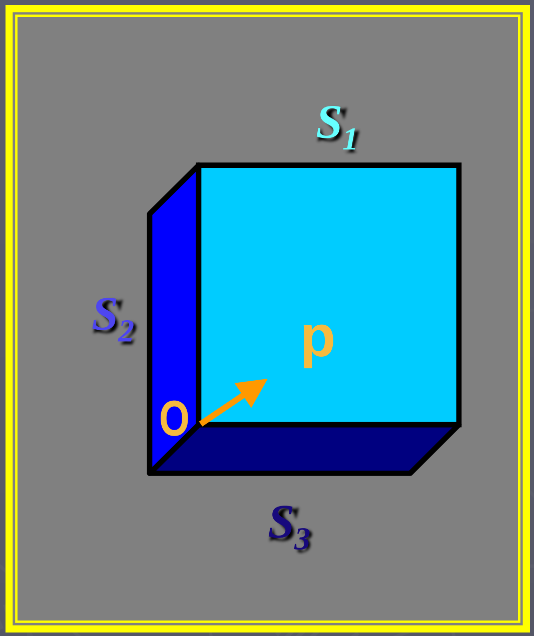
$\vec{p} \to \vec{p}_2$ πάνω στη ΔS

$\vec{p} \to \vec{p}_3$ κάθετη στη ΔS

p₃ = κάθετη ή ορθή συνιστώσα τάσης

p₁, p₂ = διατμητικές συνιστώσες τάσης (εφαπτομενικές)

Τάση σε Σημείο Φυσικού Σώματος



Μεταβολή προσανατολισμού ΔS $\Rightarrow$ μεταβολή $\vec{p}$

$\Rightarrow$ μεταβολή p_1, p_2, p_3

Πλήρης περιγραφή $\Rightarrow$ καθορισμός συνιστωσών ως προς κάθε επίπεδο που περνά από το O

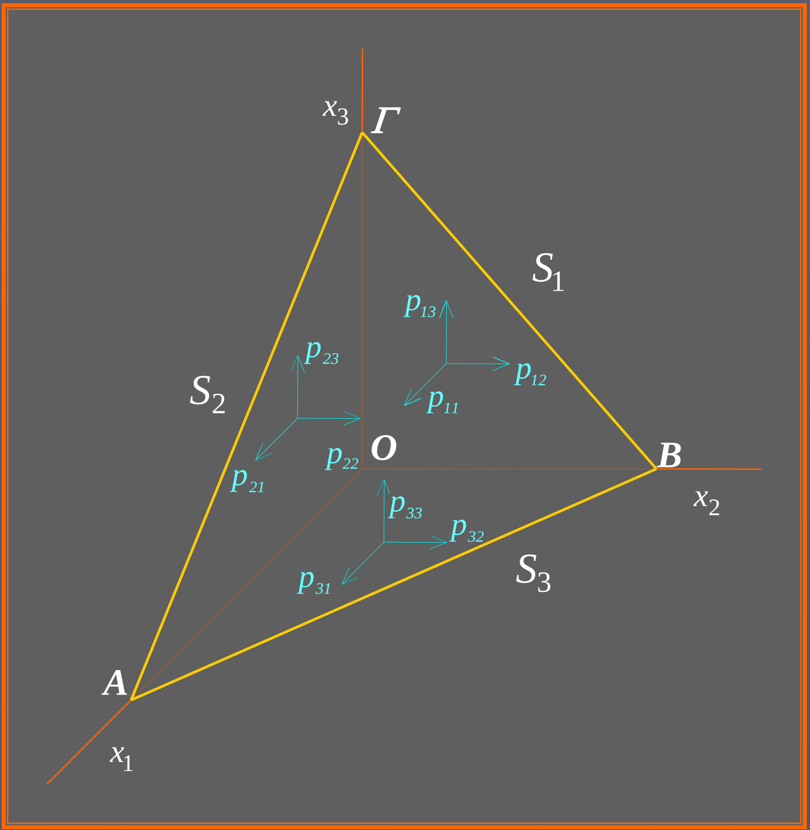
S_1	S_2	S_3
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
3 comp.	3 comp.	3 comp.

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\vec{p}$ καθορίζεται από 9 συνιστώσες

<u>τανυστής 2ης τάξης</u> (3^2 comp.)

Τάση σε Σημείο Φυσικού Σώματος *(...συνέχεια)*



$Ox_1 \perp Ox_2 \perp Ox$, $\delta x_1=OA$, $\delta x_2=OB$, $\delta x_3=O\Gamma$

Τετράεδρο ΟΑΒΓ σε στατική ισορροπία υπό επίδραση ροπών και δυνάμεων από την ύλη που το περιβάλλει

$$A\nu : \delta V_{OAB\Gamma} \to 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \delta x_1 \to 0 \\ \delta x_2 \to 0 \\ \delta x_3 \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Sigma\upsilon\nu\iota\sigma\tau\acute{\omega}\sigma\alpha\ \delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\eta\varsigma}{E\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ S} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\iota\sigma\tau\acute{\omega}\sigma\alpha\ \tau\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}o\ O$$

Συμβολισμός : $\mathbf{p_{ij}}$

i : άξονας κάθετος στο επίπεδο που ασκείται η συνιστώσα τάσης

j : άξονας παράλληλος προς τη συνιστώσα τάσης

9 συνιστώσες τάσης : $\mathbf{p_{11}, p_{22}, p_{33}}$ = ***<u>κάθετες</u>*** συνιστώσες τάσης

$\mathbf{p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, p_{33}}$ = ***<u>διατμητικές</u>*** συνιστώσες τάσης

Τάση σε Σημείο Φυσικού Σώματος *(…συνέχεια)*

Κάθετη συνιστώσα τάσης με φορά προς το :

εσωτερικό του χώρου = τάση συμπίεσης (+)
εξωτερικό του χώρου = τάση εφελκυσμού (-)

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Στοιχεία διαγωνίου = ***κάθετες συνιστώσες τάσης*** **(p_{ij}, i = j)**

Άλλα στοιχεία = ***διατμητικές συνιστώσες τάσης*** **(p_{ij}, i ≠ j)**

Συνθήκες Ισορροπίας

1. **Συνισταμένες δυνάμεις παράλληλες στους Ox_1, Ox_2, Ox_3 ίσες με 0.** $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Δίνεται δυνατότητα υπολογισμού τριών συνιστωσών τάσης που ασκούνται στο ΑΒΓ επίπεδο και είναι παράλληλες προς Ox_1, Ox_2, Ox_3 ως συνάρτηση των p_{ij}.

2. **Τρεις συνισταμένες ροπές ως προς Ox_1, Ox_2, Ox_3 είναι ίσες με 0 (αρχή διατήρησης στροφορμής).**

Εφαρμογή σε στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο με κορυφή το Ο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p_{12} = p_{21}\ ,\ p_{13} = p_{31}\ ,\ p_{23} = p_{32}} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ***ΤΑΣΗ = ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΗΣ***

Άρα πόσες συνιστώσες τάσης απαιτούνται για την περιγραφή του τανυστή τάσης;

ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ

<u>*Ιδιοδιανύσματα - Ιδιοτιμές*</u>

Η τάση σε σημείο στερεού σώματος περιγράφεται από ένα τετραγωνικό πίνακα 3x3

$$p_{ij} = \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα υπάρχει ένας αριθμός $\boldsymbol{\lambda}$ και ένα διάνυσμα $\vec{u}$ που επαληθεύουν τη σχέση:

$$\mathbf{P}\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow \mathbf{P}\vec{u} - \lambda\vec{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}\vec{u} - \lambda\mathbf{I}\vec{u} = 0 \Rightarrow (\mathbf{P} - \lambda\boldsymbol{\delta})\vec{u} = 0$$

όπου, **I** μοναδιαίος πίνακας και **δ** ο γνωστός τανυστής Kronecker που αποτελεί μοναδιαίο πίνακα 3x3 (*για i=j* $\delta_{ij}=1$ *, για* $i \neq j$ $\delta_{ij}=0$)

$\vec{u}$ …… ***<u>ιδιοδιάνυσμα</u> (eigenvector) του P***

$\boldsymbol{\lambda}$ …… ***<u>ιδιοτιμή</u> (eigenvalue) του P***

Ιδιοδιανύσματα - Ιδιοτιμές (...συνέχεια)

Ένα ομογενές σύστημα της μορφής $A\vec{u} = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις όταν η ορίζουσα του **A** είναι ίση με μηδέν, επομένως αφού $(\mathbf{P} - \lambda\delta)\vec{u} = 0$ θα ισχύει ότι:

$$|A| = |\mathbf{P} - \lambda\boldsymbol{\delta}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{11} - \lambda & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} - \lambda & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P_{11} - \lambda) \cdot \left[(P_{22} - \lambda)(P_{33} - \lambda) - P_{23}P_{32} \right] + P_{12} \cdot \left[P_{23}P_{31} - P_{21}(P_{33} - \lambda) \right] +$$

$$+ P_{13} \cdot \left[P_{21}P_{32} - P_{31}(P_{22} - \lambda) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{11}P_{22}P_{33} - \lambda P_{22}P_{33} - \lambda P_{11}P_{33} + \lambda^2 P_{33} - \lambda P_{11}P_{22} + \lambda^2 P_{22} -$$

$$- P_{11}P_{23}P_{32} + \lambda P_{23}P_{32} + \lambda^2 P_{11} - \lambda^3 + P_{12}P_{23}P_{31} - P_{12}P_{21}P_{33} +$$

$$+ \lambda P_{12}P_{21} + P_{13}P_{21}P_{32} - P_{13}P_{31}P_{22} + \lambda P_{13}P_{31} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\pi o \lambda \lambda \alpha \pi \lambda \alpha \sigma \iota \acute{\alpha} \zeta o \upsilon \mu \varepsilon \ \varepsilon \pi \acute{\iota} \ -1) \Rightarrow$$

Ιδιοδιανύσματα - Ιδιοτιμές (...συνέχεια)

$$\Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 \left(P_{11} + P_{22} + P_{33}\right) + \lambda \left(P_{22}P_{33} + P_{11}P_{33} + P_{11}P_{22} - P_{23}P_{32} - P_{12}P_{21} - P_{13}P_{31}\right) -$$

$$- \left(P_{11}P_{22}P_{33} - P_{11}P_{23}P_{32} + P_{12}P_{23}P_{31} - P_{12}P_{21}P_{33} + P_{13}P_{21}P_{32} - P_{13}P_{31}P_{22}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 = P_{11} + P_{22} + P_{33}$$

$$I_2 = P_{22}P_{33} + P_{11}P_{33} + P_{11}P_{22} - P_{23}P_{32} - P_{12}P_{21} - P_{13}P_{31}$$

$$I_3 = P_{11}P_{22}P_{33} - P_{11}P_{23}P_{32} + P_{12}P_{23}P_{31} - P_{12}P_{21}P_{33} + P_{13}P_{21}P_{32} - P_{13}P_{31}P_{22}$$

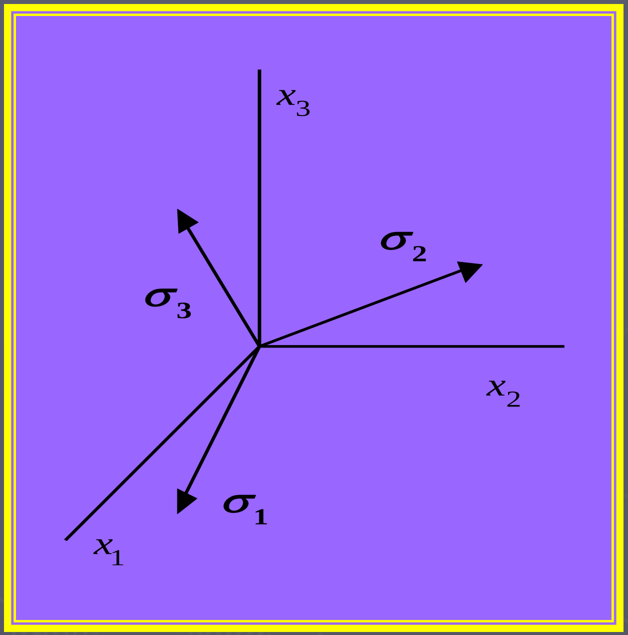
$$\boxed{\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0}$$

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ

α) Τιμές

β) Κατευθύνοντα Συνημίτονα ως προς τυχαίο σύστημα αξόνων

Κύριες Συνιστώσες Τάσης (ορισμός)



Οι τάσεις που ασκούνται σε τυχόν επίπεδο που περνά από σημείο ελαστικού σώματος εξαρτώνται από τον προσανατολισμό του επιπέδου.
Υπάρχουν τρία κάθετα επίπεδα όπου οι διατμητικές τάσεις είναι όλες ίσες με μηδέν οπότε ασκούνται μόνο κάθετες τάσεις.

Κύριες (κάθετες) συνιστώσες τάσης :
μέγιστη (***σ***$_1$), μέση (***σ***$_2$), ελάχιστη (***σ***$_3$)

$$\left(p_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right)n_j=0 \Rightarrow \left|p_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Κύριες Συνιστώσες Τάσης (α: τιμές)

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\sigma & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_{11}-\sigma)\begin{vmatrix} p_{22}-\sigma & p_{23} \\ p_{32} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} - p_{12}\begin{vmatrix} p_{21} & p_{23} \\ p_{31} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} + p_{13}\begin{vmatrix} p_{21} & p_{22}-\sigma \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$p_{12} = p_{21}$
$p_{23} = p_{32}$
$p_{31} = p_{13}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} \\ I_2 = p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{33}p_{11} - p_{23}^2 - p_{31}^2 - p_{12}^2 \\ I_3 = p_{11}p_{22}p_{33} + 2p_{12}p_{23}p_{31} - p_{11}p_{23}^2 - p_{22}p_{31}^2 - p_{33}p_{12}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \cdots \ (\max) \\ \sigma_2 = \cdots \\ \sigma_3 = \cdots \ (\min) \end{cases}$$

Κύριες Συνιστώσες Τάσης (α: τιμές)

Άρα ο τανυστής τάσης ως προς τους κύριους άξονες τάσης ορίζεται από τον πίνακα:

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(α: τιμές)*

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \Rightarrow$$

Λύσεις είναι οι $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$. Από τις ιδιότητες εξισώσεων 3ου βαθμού είναι γνωστό ότι:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \text{Είναι ακόμα γνωστό οτι:} \\ I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = p_{11} + p_{22} + p_{33}$$

Επειδή $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ είναι σταθερές ποσότητες προκύπτει ότι και το άθροισμα:

$$\mathbf{p_{11}+p_{22}+p_{33}}$$

είναι επίσης **σταθερή ποσότητα** που χαρακτηρίζει κάθε σημείο φυσικού σώματος, **ανεξαρτήτως προσανατολισμού του συστήματος συντεταγμένων** που χρησιμοποιείται

Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(β: κατευθύνοντα συνημίτονα)*

Κατευθύνοντα συνημίτονα της $\boldsymbol{\sigma_1}$ ως προς ένα τυχαίο σύστημα αξόνων ως προς το οποίο θεωρούμε τις συνιστώσες τάσης της $\boldsymbol{p_{ij}}$:

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{11} &= \begin{vmatrix} p_{22}-\sigma_1 & p_{23} \\ p_{32} & p_{33}-\sigma_1 \end{vmatrix} = (p_{22}-\sigma_1)(p_{33}-\sigma_1) - p_{23}^2 \\
M_{12} &= \begin{vmatrix} p_{23} & p_{21} \\ p_{33}-\sigma_1 & p_{31} \end{vmatrix} = p_{23}p_{31} - p_{21}(p_{33}-\sigma_1) \\
M_{13} &= \begin{vmatrix} p_{21} & p_{22}-\sigma_1 \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = p_{21}p_{32} - p_{31}(p_{22}-\sigma_1) \\
M_1 &= \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2}
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow
\left.
\begin{aligned}
\sigma\upsilon\nu\theta_{11} &= \frac{M_{11}}{M_1} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{12} &= \frac{M_{12}}{M_1} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{13} &= \frac{M_{13}}{M_1}
\end{aligned}
\right\}
$$

Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(β: κατευθύνοντα συνημίτονα)*

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\sigma & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} p_{22}-\sigma_1 & p_{23} \\ p_{32} & p_{33}-\sigma_1 \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} p_{23} & p_{21} \\ p_{33}-\sigma_1 & p_{31} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} p_{21} & p_{22}-\sigma_1 \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2}$$

Κύριες Συνιστώσες Τάσης (β: κατευθύνοντα συνημίτονα)

Κατευθύνοντα συνημίτονα της $\boldsymbol{\sigma_2}$ ως προς ένα τυχαίο σύστημα αξόνων ως προς το οποίο θεωρούμε τις συνιστώσες τάσης της $\boldsymbol{p_{ij}}$:

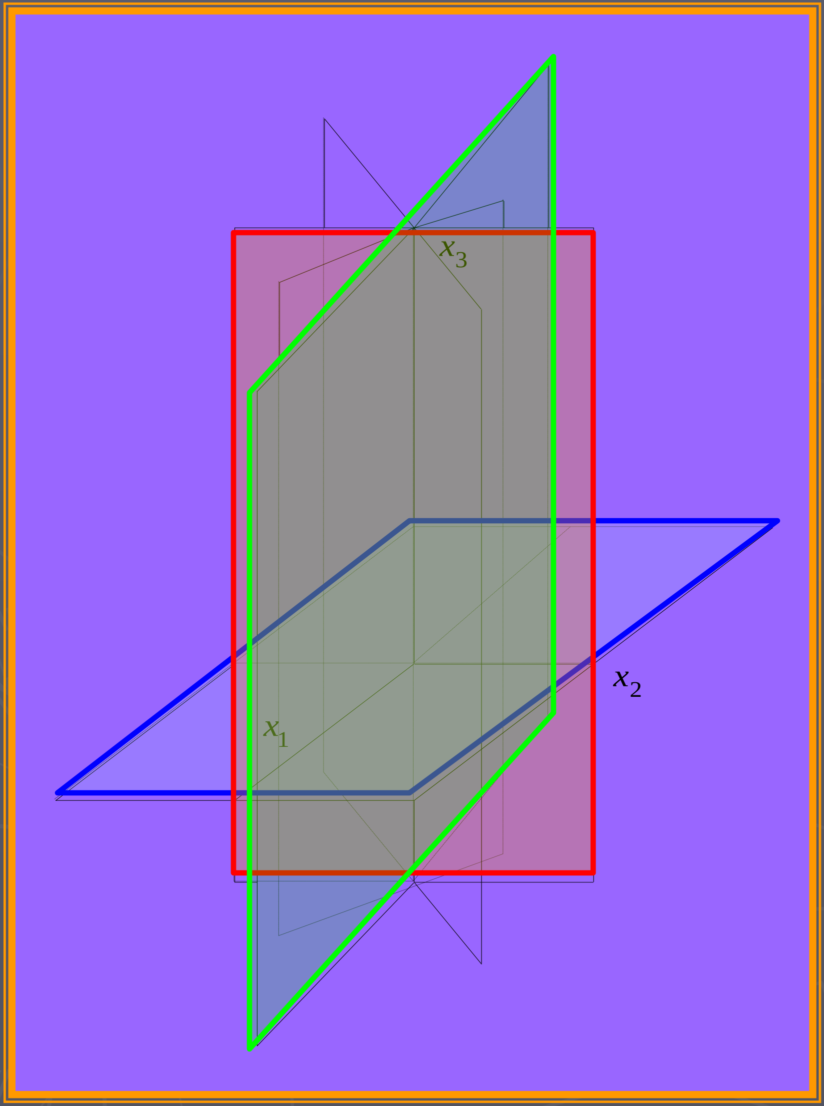
$$\left.\begin{aligned}
M_{22} &= \begin{vmatrix} p_{13} & p_{11}-\sigma_2 \\ p_{33}-\sigma_2 & p_{31} \end{vmatrix} = p_{13}^2 - (p_{11}-\sigma_2)(p_{33}-\sigma_2) \\
M_{21} &= \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{32} & p_{33}-\sigma_2 \end{vmatrix} = p_{12}(p_{33}-\sigma_2) - p_{13}p_{32} \\
M_{23} &= \begin{vmatrix} p_{11}-\sigma_2 & p_{12} \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = p_{32}(p_{11}-\sigma_2) - p_{12}p_{31} \\
M_2 &= \sqrt{M_{21}^2 + M_{22}^2 + M_{23}^2}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}
\sigma\upsilon\nu\theta_{22} &= \frac{M_{22}}{M_2} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{21} &= \frac{M_{21}}{M_2} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{23} &= \frac{M_{23}}{M_2}
\end{aligned}\right\}$$

<u>Κύριες Συνιστώσες Τάσης</u> *(β: κατευθύνοντα συνημίτονα)*

Κατευθύνοντα συνημίτονα της $\boldsymbol{\sigma_3}$ ως προς ένα τυχαίο σύστημα αξόνων ως προς το οποίο θεωρούμε τις συνιστώσες τάσης της $\boldsymbol{p_{ij}}$:

$$\left.\begin{aligned}
M_{33} &= \begin{vmatrix} p_{11}-\sigma_3 & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma_3 \end{vmatrix} = (p_{11}-\sigma_3)(p_{22}-\sigma_3) - p_{12}^2 \\
M_{31} &= \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{22}-\sigma_3 & p_{23} \end{vmatrix} = p_{12}p_{23} - p_{13}(p_{22}-\sigma_3) \\
M_{32} &= \begin{vmatrix} p_{13} & p_{11}-\sigma_3 \\ p_{23} & p_{21} \end{vmatrix} = p_{13}p_{21} - p_{23}(p_{11}-\sigma_3) \\
M_3 &= \sqrt{M_{31}^2 + M_{32}^2 + M_{33}^2}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}
\sigma\upsilon\nu\theta_{31} &= \frac{M_{31}}{M_3} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{32} &= \frac{M_{32}}{M_3} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{33} &= \frac{M_{33}}{M_3}
\end{aligned}\right\}$$

Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(...συνέχεια)*



3 ζεύγη επιπέδων διχοτομούν τις γωνίες των 3 κυρίων επιπέδων τάσης

$\Downarrow$

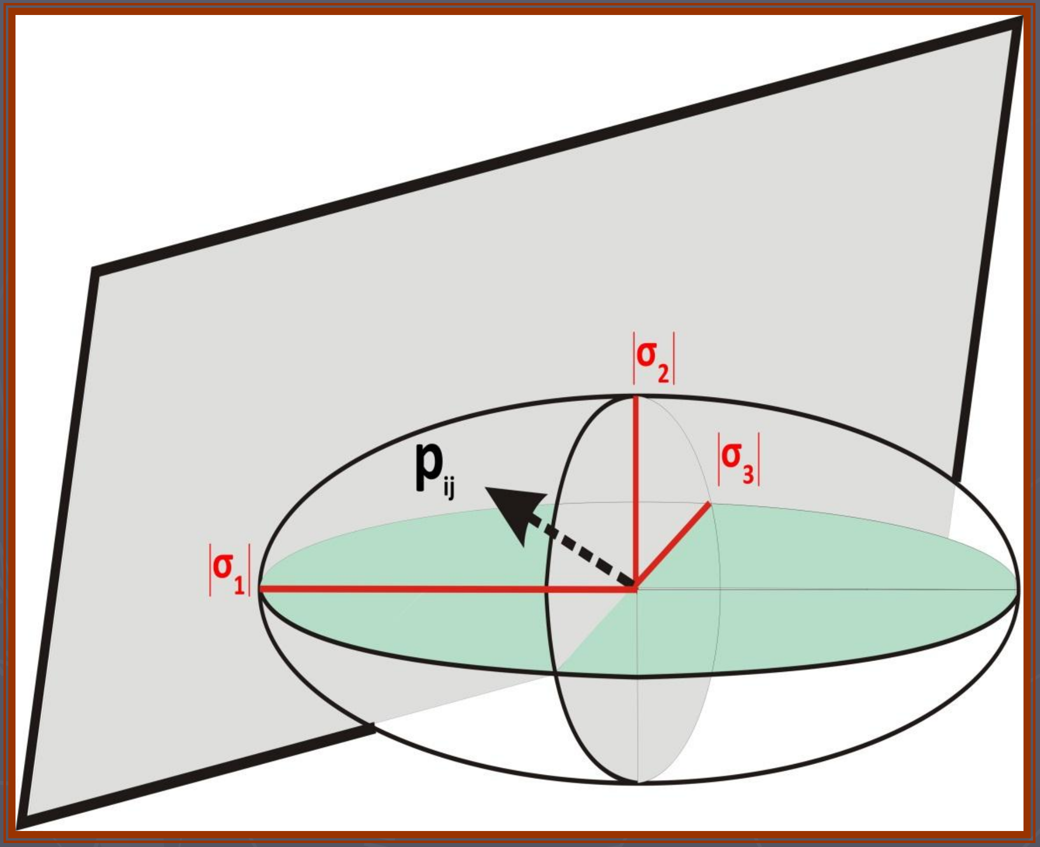
Σε αυτά οι διατμητικές τάσεις παίρνουν τις ακραίες τιμές τους = ***κύριες διατμητικές τάσεις*** :

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \tau_{3/1} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

ενώ οι κάθετες συνιστώσες τάσης γίνονται :

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \sigma_{2/3} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \sigma_{3/1} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$$

Κύριες Συνιστώσες Τάσης *(…συνέχεια)*



Κατανομή τάσεων σε σημείο σώματος

Ελλειψοειδές του Lamé

Το διάνυσμα τάσης (p_{ij}) που ασκείται στο επίπεδο ορίζεται από την απόσταση του κέντρου του ελλειψοειδούς από το σημείο επαφής του επιπέδου με το ελλειψοειδές.

Οι τρεις ημιάξονες του ελλειψοειδούς έχουν μήκη που αντιστοιχούν στα μέτρα των τριών κύριων συνιστωσών τάσης, σ_1, σ_2, σ_3.

Ανάλυση Τανυστή Τάσης

Θεωρούμε την τάση ως προς τυχόν σύστημα αξόνων.
Τάση = συμμετρικός τανυστής $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}}^{\iota\sigma o\tau\rho o\pi\acute{\varepsilon}\alpha\varsigma} + \overbrace{\begin{pmatrix} p_{11}-\sigma_0 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma_0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma_0 \end{pmatrix}}^{\varepsilon\kappa\tau\rho o\pi\acute{\varepsilon}\alpha\varsigma}$$

$$3\sigma_0 = p_{11} + p_{22} + p_{33} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{p_{11} + p_{22} + p_{33}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

σ_0 = Μέση κάθετη τάση

Μονάδες Τάσης και Τιμές της στη Γη

Μονάδες τάσης = μονάδες πίεσης

CGS	1 dyn/cm^2
MKS (IS)	1 Nt/m^2
Άλλες Μονάδες	1 bar
	1 Pa (Pascal)
Σχέσεις Μεταξύ Μονάδων	1 bar = 10^6 dyn/cm^2
	1 Pa = 10 dyn/cm^2
	1 Mpa = 10 bar

Λιθόσφαιρα (φλοιός + άνω μανδύας) τάση = μερικά Kbar

Πτώση τάσης (stress drop) κατά τη γένεση σεισμού = μερικά bar

Μεταβολή τάσης κατά τη διάδοση σεισμικών κυμάτων = μερικές δεκάδες dyn/cm^2.

Εφαρμογή 3.1

Οι συνιστώσες τάσης ως προς τυχαίο σύστημα συντεταγμένων είναι: **p_{11}=2bar**, **p_{33}=-1bar**, **p_{22}=p_{23}=p_{12}=0**, **p_{13}=1bar**. Να υπολογιστούν οι ***σ_1, σ_2, σ_3*** και οι γωνίες τους με τους άξονες του συστήματος β) οι κύριες διατμητικές τάσεις ***$\tau_{1/2}$, $\tau_{2/3}$, $\tau_{3/1}$*** γ) οι κάθετες τάσεις ***$\sigma_{1/2}$, $\sigma_{2/3}$*** και ***$\sigma_{3/1}$*** στα επίπεδα που οι ***τ*** παίρνουν τις ακραίες τους τιμές.

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= p_{11} + p_{22} + p_{33} \\ I_2 &= p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{33}p_{11} - p_{23}^2 - p_{31}^2 - p_{12}^2 \\ I_3 &= p_{11}p_{22}p_{33} + 2p_{12}p_{23}p_{31} - p_{11}p_{23}^2 - p_{22}p_{31}^2 - p_{33}p_{12}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_1 = 1, \quad I_2 = -3, \quad I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \Rightarrow \sigma(\sigma^2 - \sigma - 3) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} \sigma_1 &= 2.3bar \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -1.30bar \end{aligned}\right.$$

Κατευθύνοντα συνημίτονα της σ_1:

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= (p_{22} - \sigma_1)(p_{33} - \sigma_1) - p_{23}^2 \\ M_{12} &= p_{23}p_{31} - p_{21}(p_{33} - \sigma_1) \\ M_{13} &= p_{21}p_{32} - p_{31}(p_{22} - \sigma_1) \\ M_1 &= \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\theta_{11} &= \frac{M_{11}}{M_1} \\ \sigma\upsilon\nu\theta_{12} &= \frac{M_{12}}{M_1} \\ \sigma\upsilon\nu\theta_{13} &= \frac{M_{13}}{M_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} & M_{11} = 7.59, \quad M_{12} = 0, \\ & M_{13} = 2.30, \quad M_1 = 7.93 \\ & \theta_{11} = 17^0, \quad \theta_{12} = 90^0, \\ & \theta_{13} = 73^0 \end{aligned}\right.$$

Εφαρμογή 3.1 *(...συνέχεια)*

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε τα κατευθύνοντα συνημίτονα της σ_3:

$\theta_{31}=73^0$, $\theta_{32}=90^0$, $\theta_{33}=163^0$

Κύριες διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{1/2}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=1.15bar \qquad \tau_{2/3}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}=0.65bar \qquad \tau_{3/1}=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}=-1.80bar$$

Κάθετες τάσεις:

$$\sigma_{1/2}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=1.15bar, \qquad \sigma_{2/3}=\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}=-0.65bar, \qquad \sigma_{3/1}=\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}=0.5bar$$

Άσκηση 3.1

Οι συνιστώσες τάσης ως προς τυχαίο σύστημα συντεταγμένων είναι: p_{11}=5bar, p_{22}=-3bar, p_{12}=4bar, $p_{33}=p_{13}=p_{23}=0$. Να υπολογιστούν οι σ_1, σ_2, σ_3 και οι γωνίες τους με τους άξονες του συστήματος β) οι κύριες διατμητικές τάσεις $\tau_{1/2}$, $\tau_{2/3}$, $\tau_{3/1}$ γ) οι κάθετες τάσεις $\sigma_{1/2}$, $\sigma_{2/3}$, $\sigma_{3/1}$ στα επίπεδα που που διχοτομούν τις γωνίες των επιπέδων των κύριων αξόνων τάσης.

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= p_{11} + p_{22} + p_{33} \\ I_2 &= p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{33}p_{11} - p_{23}^2 - p_{31}^2 - p_{12}^2 \\ I_3 &= p_{11}p_{22}p_{33} + 2p_{12}p_{23}p_{31} - p_{11}p_{23}^2 - p_{22}p_{31}^2 - p_{33}p_{12}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_1 = 2, \quad I_2 = -31, \quad I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \Rightarrow \sigma(\sigma^2 - 2\sigma - 31) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} \sigma_1 &= 6.66 bar \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -4.66 bar \end{aligned}\right.$$

Κατευθύνοντα συνημίτονα της σ_1:

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= (p_{22} - \sigma_1)(p_{33} - \sigma_1) - p_{23}^2 \\ M_{12} &= p_{23}p_{31} - p_{21}(p_{33} - \sigma_1) \\ M_{13} &= p_{21}p_{32} - p_{31}(p_{22} - \sigma_1) \\ M_1 &= \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\theta_{11} &= \frac{M_{11}}{M_1} \\ \sigma\upsilon\nu\theta_{12} &= \frac{M_{12}}{M_1} \\ \sigma\upsilon\nu\theta_{13} &= \frac{M_{13}}{M_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} & M_{11} = 64.29, \quad M_{12} = 26.63, \\ & M_{13} = 0, \quad M_1 = 69.58 \\ & \theta_{11} = 23^0, \quad \theta_{12} = 67^0, \\ & \theta_{13} = 90^0 \end{aligned}\right.$$

Άσκηση 3.1 *(...συνέχεια)*

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε τα κατευθύνοντα συνημίτονα της σ_3:

$\theta_{31}=67^0$, $\theta_{32}=23^0$, $\theta_{33}=90^0$

Κύριες διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{1/2}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=3.33bar \qquad \tau_{2/3}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}=2.33bar \qquad \tau_{3/1}=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}=-5.66bar$$

Κάθετες τάσεις:

$$\sigma_{1/2}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=3.33bar, \qquad \sigma_{2/3}=\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}=-2.33bar, \qquad \sigma_{3/1}=\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}=1.0bar$$

Άσκηση 3.2

Οι συνιστώσες τάσης ως προς τυχαίο σύστημα συντεταγμένων είναι: $p_{11}=5bar$, $p_{22}=-3bar$, $p_{12}=4bar$, $p_{33}=p_{13}=p_{23}=0$. Οι κύριες συνιστώσες τάσης είναι: $\sigma_1=6.67bar$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-4.67bar$
Να παρασταθεί η τάση υπό μορφή μητρών ως προς το Oxyz και ως προς το σύστημα των κύριων αξόνων τάσης. Να βρεθεί το ίχνος της και η μέση κάθετη τάση. Να αναλυθεί σε ένα ισοτροπέα και ένα εκτροπέα ως προς τα δύο συστήματα αξόνων.

Ως προς τυχόν σύστημα αξόνων:

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ως προς προς σύστημα κύριων αξόνων:

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.67 \end{pmatrix}$$

Ίχνος $p_{kk} = p_{11} + p_{22} + p_{33} = 2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

Μέση κάθετη τάση :

$$\sigma_0 = \frac{p_{11} + p_{22} + p_{33}}{3} = 0.67$$

Άσκηση 3.2 *(...συνέχεια)*

Ανάλυση ως προς τυχόν σύστημα αξόνων:

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11}-\sigma_0 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma_0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma_0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0.67 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.33 & 4 & 0 \\ 4 & -3.67 & 0 \\ 0 & 0 & -0.67 \end{pmatrix}$$

Ανάλυση ως προς προς σύστημα κύριων αξόνων τάσης:

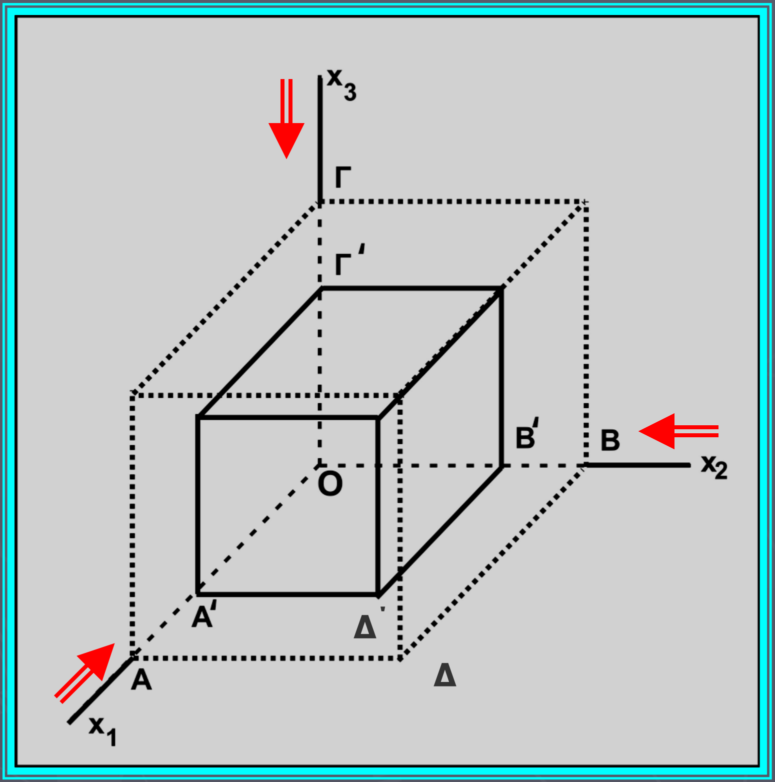
$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0.67 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6.0 & 4 & 0 \\ 4 & -0.67 & 0 \\ 0 & 0 & -5.34 \end{pmatrix}$$

Παραμόρφωση σε Σημείο Σώματος

Συνολική παραμόρφωση στοιχείου στη γειτονιά ενός σημείου:

ΕΙΔΟΣ		ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
(I) Μεταβολή Όγκου	→	**ΚΥΒΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ**
(II) Μεταβολή Σχήματος	→	**ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ**
(III) Περιστροφή Στοιχείου	→	(συνήθως αμελητέα)

Κυβική Παραμόρφωση



Αρχική κατάσταση: ΟΑ=δx_1, ΟΒ=δx_2, ΟΓ=δx_3

Θεωρούμε ότι εξωτερικές δυνάμεις προκαλούν μόνο μεταβολή του όγκου

Α ⟹ Α′ => ΑΑ′ = δu_1

Β ⟹ Β′ => ΒΒ′ = δu_2

Γ ⟹ Γ′ => ΓΓ′ = δu_3

Ονομάζουμε ***ανηγμένες επιμηκύνσεις*** κατά τις διευθύνσεις των Ox_1, Ox_2, Ox_3 τις:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta u_1}{\delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11}, \quad \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta u_2}{\delta x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = e_{22},$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta u_3}{\delta x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = e_{33}$$

$$e_{ii} = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}$$

Ο e_{ii} είναι συμμετρικός τανυστής β′ τάξης και ονομάζεται ***κυβική παραμόρφωση***

Ανηγμένη Κυβική Παραμόρφωση, θ

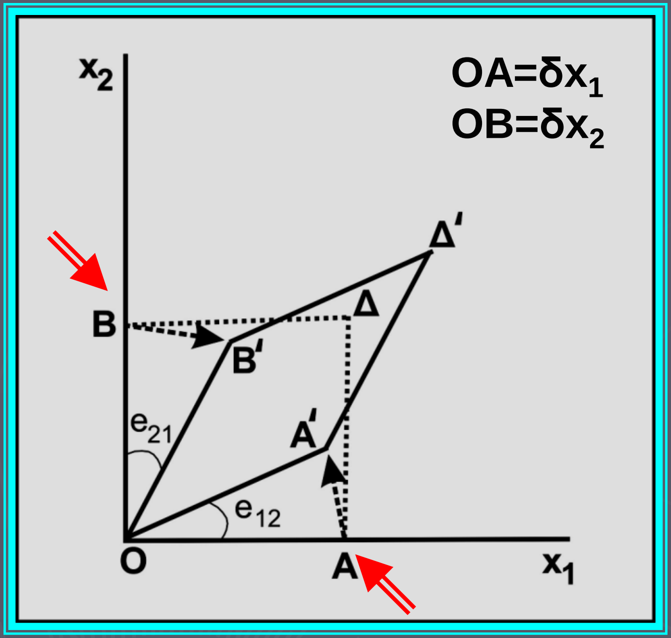
Είναι ο λόγος της μεταβολής του όγκου ενός στοιχείου προς τον αρχικό του όγκο:

$$\theta = \frac{\delta V}{V}$$

Αποδεικνύεται ότι $\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ (ίχνος του τανυστή κυβικής παραμόρφωσης e_{ii})

Δεν επηρεάζεται από την αλλαγή των αξόνων, άρα είναι μονόμετρο μέγεθος

Διατμητική Παραμόρφωση



Θεωρούμε μεταβολή <u>μόνο του σχήματος</u> (όχι του όγκου) στο επίπεδο x_1x_2

AA΄ απειροελάχιστη => AA΄~//x_2 και AA΄ = δu_2

BB΄ απειροελάχιστη => BB΄~//x_1 και BB΄ = δu_1

$$\lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{BB'}{OB}+\frac{AA'}{OA}\right)=\lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x_2}+\frac{\delta u_2}{\delta x_1}\right)=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\quad e_{23}=e_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),\quad e_{31}=e_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$

Οι ποσότητες **e_{12}=e_{21}** , **e_{23}=e_{32}** , **e_{13}=e_{31}** είναι γωνίες, ονομάζονται **γωνίες διάτμησης** και ορίζουν τις **ανηγμένες διατμητικές παραμορφώσεις** του σώματος (ως προς το σημείο Ο) που λαμβάνουν χώρα κάθετα στους άξονες Ox_3, Ox_1 και Ox_2, αντίστοιχα.

Ανηγμένη Διατμητική Παραμόρφωση, e_{ij}

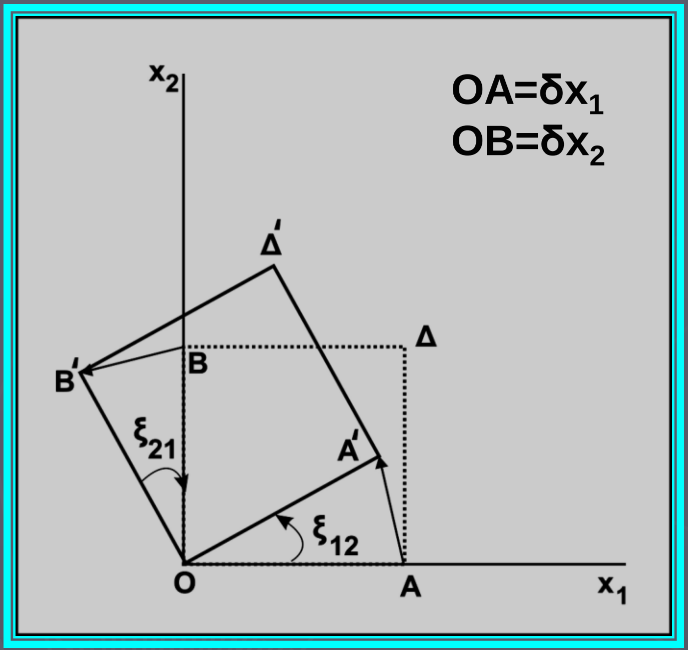
Ορίζεται από τη παρακάτω σχέση και είναι ένας συμμετρικός τανυστής β΄ τάξης με μηδενικό ίχνος (και μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου του):

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 0 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

i = άξονας πάνω στον οποίο βρίσκεται το στοιχείο που παραμορφώνεται

j = άξονας παράλληλα προς τον οποίο γίνεται η παραμόρφωση

Περιστροφή



Εδώ θεωρούμε μόνο περιστροφή του σώματος και όχι μεταβολή του όγκου ή του σχήματος. Εξετάζουμε τη περιστροφή του σώματος γύρω από τον άξονα Ox_3

AA΄ απειροελάχιστη => AA΄~//x_2 και AA΄ = δu_2

BB΄ απειροελάχιστη => BB΄~//x_1 και BB΄ = $-\delta u_1$

το (-) σημαίνει αρνητική φορά (ως προς Ox_1) του αντίστοιχου διανύσματος μετάθεσης (BB΄).

$$\lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{AA'}{OA}+\frac{BB'}{OB}\right)=\lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{\delta u_2}{\delta x_1}-\frac{\delta u_1}{\delta x_2}\right)=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$\xi_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),\quad \xi_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),\quad \xi_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

Οι ποσότητες **$\xi_{12} = -\xi_{21}$, $\xi_{23} = -\xi_{32}$, $\xi_{13} = -\xi_{31}$** (αντισυμμετρικός τανυστής β΄ τάξης) ορίζουν την **περιστροφή του σώματος** που λαμβάνει χώρα γύρω από τους άξονες Ox_3, Ox_2 και Ox_1, αντίστοιχα.

Περιστροφή (...συνέχεια)

Η περιστροφή ορίζεται τελικά από τη παρακάτω σχέση και είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής β΄ τάξης με μηδενικό ίχνος (και μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου του):

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & 0 & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Ολική Παραμόρφωση

Είναι ένας τανυστής β΄ τάξης που ισούται με το άθροισμα:
της κυβικής παραμόρφωσης, e_{ii}, της διατμητικής παραμόρφωσης, e_{ij} και της περιστροφής ξ_{ij}:

$$E_{ij} = e_{ii} + e_{ij} + \xi_{ij}$$

όπου,

e_{ii} = κυβική παραμόρφωση (συμμετρικός τανυστής με μηδενικά τα στοιχεία εκτός διαγωνίου)

e_{ij} = διατμητική παραμόρφωση (συμμετρικός τανυστής με μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου)

ξ_{ij} = κυβική παραμόρφωση (αντισυμμετρικός τανυστής με μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου)

<u>Ολική Παραμόρφωση</u> <u>(...συνέχεια)</u>

Οι τανυστές κυβικής και διατμητικής παραμόρφωσης μπορούν να αθροισθούν και να δώσουν ένα συμετρικό τανυστή β΄ τάξης, e_{ij}, οπότε η ολική παραμόρφωση είναι το άθροισμα ενός συμμετρικού (e_{ij}) και ενός αντισυμμετρικού τανυστή (ξ_{ij}).

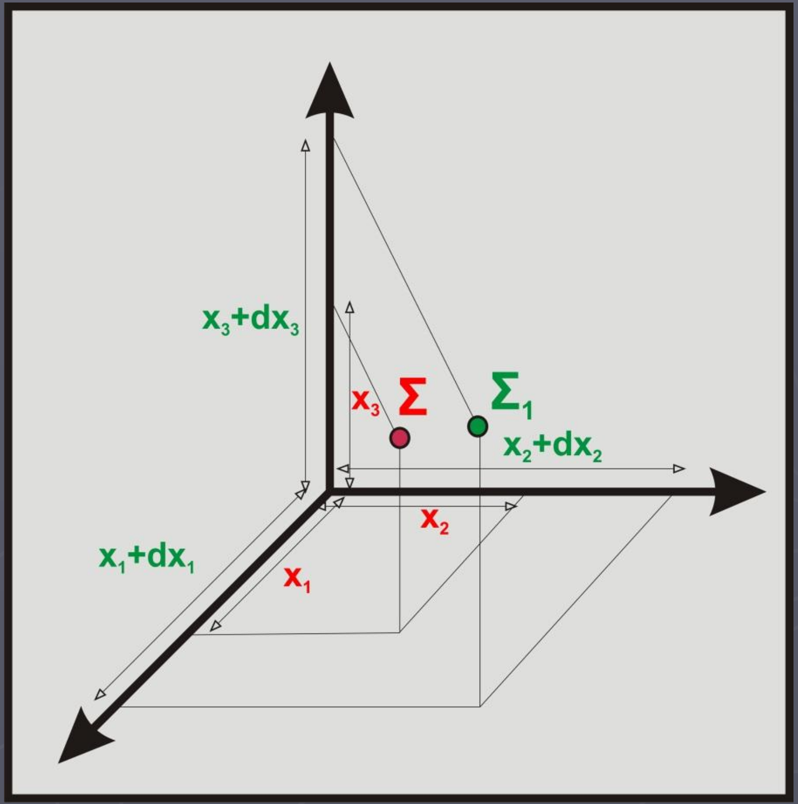
Επειδή κατά τη διάδοση των σεισμικών κυμάτων η περιστροφή είναι αμελητέα (εξαιρούνται οι περιοχές κοντά στην εστία του σεισμού) μπορεί να μην συμπεριληφθεί στην ολική παραμόρφωση οπότε τελικά:

$$E_{ij} = e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

Κατ' αντιστοιχία με τις κύριες συνιστώσες τάσης, μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχουν τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα πάνω στα οποία οι <u>*διατμητικές παραμορφώσεις είναι όλες ίσες με μηδέν*</u> οπότε παρατηρούνται μόνο ανηγμένες επιμηκύνσεις, ***ε_1, ε_2, ε_3*** (***κύριες ανηγμένες επιμηκύνσεις***) κατά μήκος των αξόνων (***κύριοι άξονες παραμόρφωσης***) που ορίζονται από τα παραπάνω επίπεδα.

Στοιχειώδης Μετάθεση

Έστω σημεία
$\Sigma(x_1, x_2, x_3)$ και
$\Sigma_1(x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, x_3+\delta x_3)$



Το σώμα παραμορφώνεται οπότε οι συνιστώσες μετάθεσης είναι:

Για το Σ $\longrightarrow$ u_1, u_2, u_3 και

Για το Σ_1 $\longrightarrow$ $u_1+\delta u_1, u_2+\delta u_2, u_3+\delta u_3$

Οι σχετικές συνιστώσες μετάθεσης $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3$ του Σ_1 ως προς Σ γίνονται:

Στοιχειώδης Μετάθεση (...συνέχεια)

$$\left.\begin{aligned} &\delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\delta x_3 \\ &e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2},\ e_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta u_1 = e_{11}\delta x_1 + e_{12}\delta x_2 + e_{13}\delta x_3$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\delta x_3 \\ &e_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1},\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ e_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta u_2 = e_{21}\delta x_1 + e_{22}\delta x_2 + e_{23}\delta x_3$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\delta x_3 \\ &e_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1},\ e_{32} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2},\ e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta u_3 = e_{31}\delta x_1 + e_{32}\delta x_2 + e_{33}\delta x_3$$

Στοιχειώδης Μετάθεση *(...συνέχεια)*

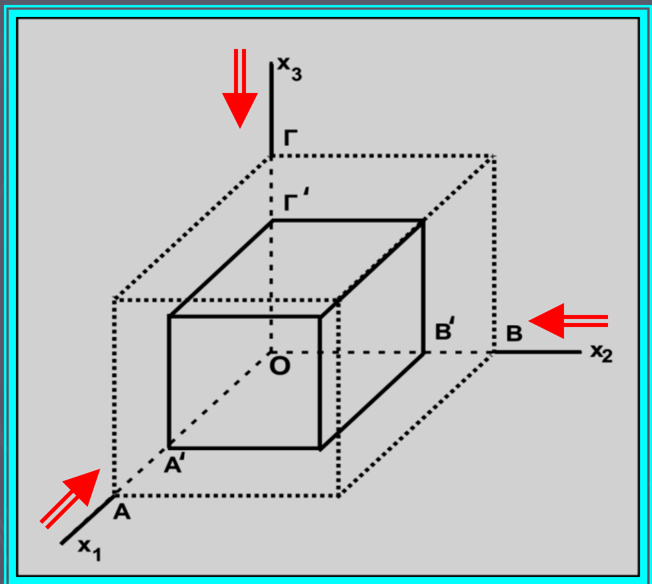
Και γενικά:

$$\delta u_i = \sum_{i,j=1}^{3} e_{ij} \delta x_j$$

Επομένως είναι δυνατός ο υπολογισμός της σχετικής μετάθεσης δύο γειτονικών υλικών σημείων όταν είναι γνωστές οι <u>αρχικές τους θέσεις</u> και ο <u>τανυστής ανηγμένης παρμόρφωσης</u>

Εφαρμογή 3.2

Να αποδειχθεί ότι α) η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση, θ, είναι $\boldsymbol{\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}}$ και β) ότι $\boldsymbol{\theta = div u_i}$.



Αρχικός όγκος: $V_0=(OA)(OB)(O\Gamma)=x_1x_2x_3$

Κυβική παραμόρφωση =>
$$x_1 \rightarrow x_1 - e_{11}x_1$$
$$x_2 \rightarrow x_2 - e_{22}x_2$$
$$x_3 \rightarrow x_3 - e_{33}x_3$$

Τελικός όγκος: $V_1=(x_1-e_{11}x_1)(x_2-e_{22}x_2)(x_3-e_{33}x_3)=$

$=x_1x_2x_3(1-e_{11})(1-e_{22})(1-e_{33}) \Rightarrow$

$$V_1=V_0(1-e_{11})(1-e_{22})(1-e_{33})$$

$$\theta = \frac{\delta V}{V_0} = \frac{V_0 - V_1}{V_0} = \frac{V_0 - V_0(1-e_{11})(1-e_{22})(1-e_{33})}{V_0} = 1-(1-e_{11})(1-e_{22})(1-e_{33}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} - \underbrace{(e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{11}e_{33} - e_{11}e_{22}e_{33})}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}}$$

Εφαρμογή 3.2 *(...συνέχεια)*

$$\left.\begin{array}{l} e_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ e_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ e_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} \Rightarrow \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Rightarrow \theta = div u_i \quad (= \nabla \cdot \vec{u})$$

Σχέση Τάσης - Ανηγμένης Παραμόρφωσης

Σε κάθε σημείο τελείως ελαστικού σώματος και για συγκεκριμένες θερμοδυναμικές συνθήκες **η ανηγμένη παραμόρφωση είναι συνάρτηση της τάσης**. Για ένα τέτοιο σώμα ισχύει ο γενικευμένος νόμος του Hook:

"Σε κάθε σημείο πλήρως ελαστικού σώματος η κάθε συνιστώσα τάσης είναι γραμμική συνάρτηση των εννέα (έξι) συνιστωσών της ανηγμένης παραμόρφωσης"

Έτσι ορίζονται 81 (=9x9) συντελεστές αναλογίας, $\mathbf{c_{mn}}$, που εξαρτώνται από το υλικό του σώματος και τις θερμοδυναμικές συνθήκες.

Οι συντελεστές αναλογίας, $\mathbf{c_{mn}}$, ονομάζονται *ελαστικές σταθερές* και συνθέτουν ένα τανυστή 4ης τάξης (3^4 συνιστώσες) που ονομάζεται *ελαστικός τανυστής*.

Σύμφωνα λοιπόν με το νόμο του Hook η κάθε συνιστώσα τάσης σε σημείο τελείως ελαστικού σώματος ορίζεται από τη γραμμική σχέση:

$$p_{11} = c_{m11} e_{11} + c_{m12} e_{12} + c_{m13} e_{13} + c_{m21} e_{21} + c_{m22} e_{22} + c_{m23} e_{23} + c_{m31} e_{31} + c_{m32} e_{32} + c_{m33} e_{33}$$

Όπου, **m=11** και **n**

Σχέση Τάσης - Ανηγμένης Παραμόρφωσης (...συνέχεια)

Περιορισμοί:

α) Τάση & ανηγμένη παραμόρφωση συμμετρικοί τανυστές => c_{mn} 6x6=36 συνιστώσες

$$c_{mn} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix}$$

β) Αφού η ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης θεωρείται μονοσήμαντη συνάρτηση των συνιστωσών της ανηγμένης παραμόρφωσης (συμμετρικός τανυστής), πρέπει να ισχύει $c_{mn}=c_{nm}$ (επίσης συμμετρικός τανυστής) οπότε οι ανεξάρτητοι συντελεστές του ελαστικού τανυστή c_{mn} μειώνονται στους **21**

γ) Αν το σώμα θεωρηθεί ισότροπο τότε οι γραμμικές σχέσεις που ορίζει ο νόμος του Hook δεν μεταβάλλονται με αλλαγή στο σύστημα συντεταγμένων ή στα πρόσημα, οπότε:

Οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι μόνο δύο, οι c_{11} και c_{12}

Σχέση Τάσης - Ανηγμένης Παραμόρφωσης (...συνέχεια)

Τελικά, για ελαστικό και ισότροπο μέσο ισχύει:

$$p_{ij} = c_{12}\theta\delta_{ij} + (c_{11} - c_{12})e_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

όπου, δ_{ij} ο τανυστής Kronecker ο οποίος για $i = j \Rightarrow \delta_{ij}=1$ και για $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij}=0$,
θ η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση.

Ως σταθερές Lamé, λ και μ, ορίζονται οι ποσότητες:

$$\lambda = c_{12}, \qquad \mu = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

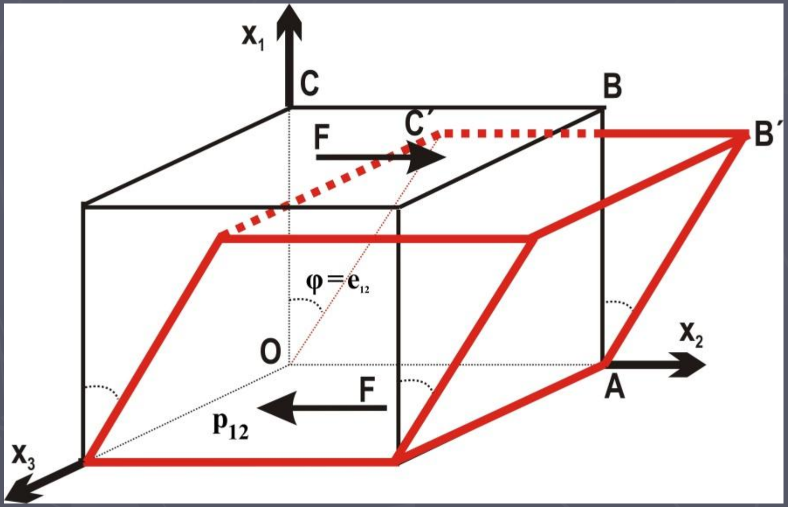
Οπότε προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις που δίνουν τις συνιστώσες τάσης σε συνάρτηση με τις συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης και τις σταθερές Lamé :

$$p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \qquad p_{12} = 2\mu e_{12}$$
$$p_{22} = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \qquad p_{23} = 2\mu e_{23}$$
$$p_{33} = \lambda\theta + 2\mu e_{33} \qquad p_{31} = 2\mu e_{31}$$

Ελαστικές Σταθερές

Είναι σταθερές που περιγράφουν την ελαστική παραμόρφωση, υπολογίζονται πειραματικά και αποτελούν συναρτήσεις των σταθερών Lamé.

1. Μέτρο διατμητικής ελαστικότητας



Εξετάζουμε τη διατμητική παραμόρφωση της έδρας OABC ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου υπό την επίδραση ζεύγους δυνάμεων που ασκείται παράλληλα προς την OA.

Γωνία διάτμησης η: $\varphi = e_{12}$

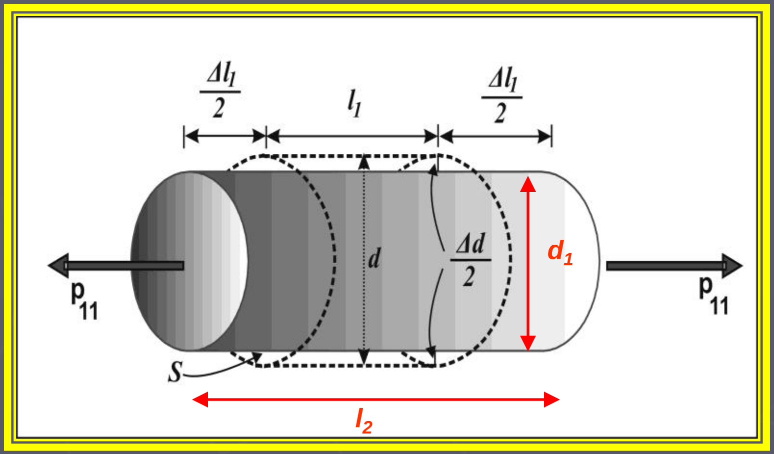
Διατμητική συνιστώσα τάσης (στις έδρες που είναι κάθετες στον Ox_1): $p_{12} = F / S$

Ονομάζουμε ***μέτρο διατμητικής ελαστικότητας ή μέτρο ακαμψίας, n***, το λόγο:

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{p_{12}}{e_{12}} \\ p_{12} &= 2\mu e_{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow n = 2\mu$$

Άρα το ***n*** όπως και το ***μ*** μετρούνται σε μονάδες τάσης (πίεσης)

2. Μέτρο επιμήκους ελαστικότητας



Άξονας της ράβδου παράλληλος προς τον Ox_1

Άσκηση δύναμης *F* κατά τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου =>
Επιμήκυνση κατά $\Delta l = l_2 - l_1$ ($= 2 * \Delta l/2$)

$$\left.\begin{array}{l} p_{11} = \dfrac{F}{S} \\ e_{11} = \dfrac{\Delta l}{l_1} \end{array}\right\} \Rightarrow E = \frac{p_{11}}{e_{11}}$$

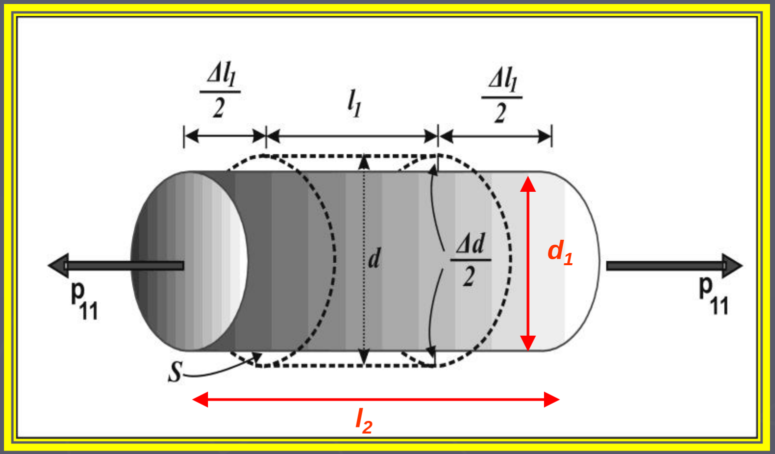
E = μέτρο επιμήκους ελαστικότητας ή μέτρο του Young
p_{11} = κάθετη τάση
e_{11} = ανηγμένη επιμήκυνση
1/E = συντελεστής ελαστικότητας

$$\left.\begin{array}{l} p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ p_{22} = 0 = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \\ p_{33} = 0 = \lambda\theta + 2\mu e_{33} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ p_{11} = (3\lambda + 2\mu)\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ \theta = \dfrac{p_{11}}{3\lambda + 2\mu} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{11} = \lambda \frac{p_{11}}{3\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{11} \Rightarrow \frac{p_{11}}{e_{11}} = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \mathbf{E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}}$$

(μονάδες τάσης)

3. Λόγος Poisson



Επιμήκυνση κατά $\Delta l_1 = l_2 - l_1 = 2 *(\Delta l_1/2)$
Επιβράχυνση κατά $\Delta d = d_1 - d = -(d - d_1)$

Ανηγμένες επιμηκύνσεις:

$$e_{11} = \Delta l_1 / l_1, \quad e_{22} = - \Delta d / d$$

Λόγος Poisson: $\sigma = - \dfrac{e_{22}}{e_{11}}$

$$\left.\begin{array}{l} p_{22} = \lambda\theta + 2\mu e_{22} = 0 \\ \theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} \\ e_{22} = e_{33} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\left(e_{11} + 2e_{22}\right) = -2\mu e_{22} \Rightarrow \lambda e_{11} = -2\left(\lambda + \mu\right)e_{22} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{e_{22}}{e_{11}} = \quad \boldsymbol{\sigma = \frac{\lambda}{2\left(\lambda + \mu\right)}}$$

Ο λόγος του Poisson είναι ***αδιάστατο μέγεθος*** και παίρνει τιμές μεταξύ *0* και *0.5*.
σ=0.5 στα υγρά (*μ=0*)
σ=0 (μ→∞) σημαίνει άπειρη αντίσταση στη διάτμηση.

4. Μέτρο κυβικής ελαστικότητας

Αν σε στερεό σώμα ασκηθεί ***ομοιόμορφη κάθετη τάση*** τότε παρατηρείται ***μεταβολή όγκου***.

Συρρίκνωση αν ασκηθεί τάση *συμπίεσης*
Διόγκωση αν ασκηθεί τάση *εφελκυσμού*

Ονομάζουμε μέτρο κυβικής ελαστικότητας την ποσότητα :

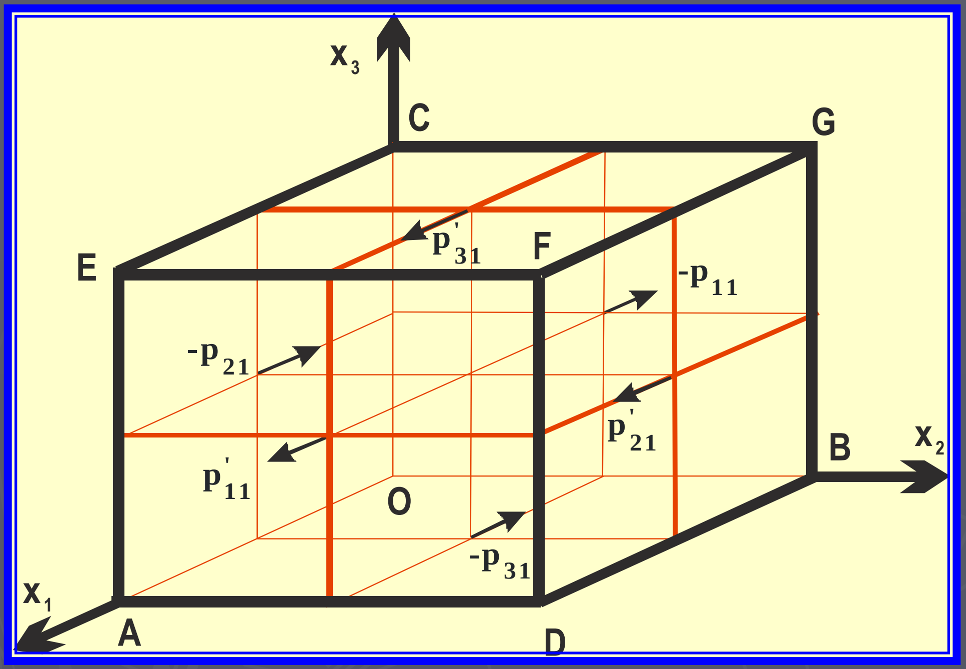
$$\kappa = -\frac{p}{\theta}$$

όπου, $\boldsymbol{p}$ η ομοιόμορφη κάθετη τάση και $\boldsymbol{\theta}$ η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση (η μεταβολή της κάθε μονάδας όγκου του σώματος).

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= -p = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ p_{22} &= -p = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \\ p_{33} &= -p = \lambda\theta + 2\mu e_{33} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -3p = 3\lambda\theta + 2\mu\theta \Rightarrow \left.\begin{aligned} -\frac{3p}{\theta} &= 3\lambda + 2\mu \\ \kappa &= -\frac{p}{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu}$$

Εξίσωση της Κίνησης



Έστω σώμα σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με στοιχειώδη μάζα, *δm*, πυκνότητα *ρ* και πλευρές $OA=dx_1$, $OB=dx_2$, $OC=dx_3$.

Ο όγκος του θα είναι $dV= dx_1.dx_2.dx_3$
και η μάζα του $dm=\rho.dV$

Υπό την επίδραση δύναμης $F_i=dm.\gamma_i$ κατά τη διεύθυνση x_i το σώμα μετακινείται κατά u_1, u_2, u_3.

Αν θεωρήσουμε άσκηση της δύναμης κατά τη διεύθυνση Ox_1 τότε: $F_1=dm.\gamma_1=$
=άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στις 6 έδρες του παραλληλεπιπέδου:

$$p'_{11}.dx_2.dx_3,\quad -p_{11}.dx_2.dx_3,\quad p'_{21}.dx_1.dx_3,\quad -p_{21}.dx_1.dx_3,\quad -p_{31}.dx_1.dx_2,\quad p'_{31}.dx_1.dx_2$$

όπου, $p'_{11} = p_{11} + \dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_1}dx_1,\quad p'_{21} = p_{21} + \dfrac{\partial p_{21}}{\partial x_2}dx_2,\quad p'_{31} = p_{31} + \dfrac{\partial p_{31}}{\partial x_3}dx_3$

$\boxed{\text{βαθμίδα μεταβολής της κάθε τάσης}}$

Εξίσωση της Κίνησης (...συνέχεια)

Αποδεικνύεται ότι :

$$\left.\begin{aligned} &\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} \\ &\text{Και επειδή :} \\ &p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ &p_{21} = 2\mu e_{21} \\ &p_{31} = 2\mu e_{31} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1}$$

Διαφορική εξίσωση κίνησης υλικών σημείων ενός ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση μιας διαταράξης κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1

Άσκηση 3.3

Οι συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση σεισμικών κυμάτων μέσα σ' αυτό είναι: $e_{11}=8*10^{-11}$, $e_{22}= e_{33} =5*10^{-11}$, $e_{12}= 3*10^{-11}$, $e_{12}=3*10^{-11}$, $e_{13}=e_{23}=10^{-11}$. α) Να γραφεί ο τανυστής ανηγμένης παραμόρφωσης ως μήτρα και ως άθροισμα τανυστή κυβικής και τανυστή διατμητικής παραμόρφωσης β) Να υπολογισθεί η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση θ και γ) Να αναλυθεί ο τανυστής ανηγμένης παραμόρφωσης σε άθροισμα ενός ισοτροπέα και ενός εκτροπέα

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 0 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8\cdot 10^{-11} & 3\cdot 10^{-11} & 10^{-11} \\ 3\cdot 10^{-11} & 5\cdot 10^{-11} & 10^{-11} \\ 10^{-11} & 10^{-11} & 5\cdot 10^{-11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\cdot 10^{-11} & 0 & 0 \\ 0 & 5\cdot 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 5\cdot 10^{-11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3\cdot 10^{-11} & 10^{-11} \\ 3\cdot 10^{-11} & 0 & 10^{-11} \\ 10^{-11} & 10^{-11} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 18\cdot 10^{-11}$$

Άσκηση 3.3 *(...συνέχεια)*

$$e_{ij}=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \theta/3 & 0 & 0 \\ 0 & \theta/3 & 0 \\ 0 & 0 & \theta/3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e_{11}-\theta/3 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22}-\theta/3 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33}-\theta/3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 8\cdot 10^{-11} & 3\cdot 10^{-11} & 10^{-11} \\ 3\cdot 10^{-11} & 5\cdot 10^{-11} & 10^{-11} \\ 10^{-11} & 10^{-11} & 5\cdot 10^{-11} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 6\cdot 10^{-11} & 0 & 0 \\ 0 & 6\cdot 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 6\cdot 10^{-11} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2\cdot 10^{-11} & 3\cdot 10^{-11} & 10^{-11} \\ 3\cdot 10^{-11} & -10^{-11} & 10^{-11} \\ 10^{-11} & 10^{-11} & -10^{-11} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3.4

Οι συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση σεισμικών κυμάτων μέσα σ' αυτό είναι:

*e_{11}=8*10^{-11}, e_{22}= e_{33} =5*10^{-11}, e_{12}= 3*10^{-11}, e_{12}=3*10^{-11}, e_{13}=e_{23}=10^{-11}*.

Αν οι σταθερές Lame είναι *λ=8*10^{11}dyn/cm^2 και μ=6*10^{11}dyn/cm^2* να υπολογισθούν οι συνιστώσες τάσης.

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ p_{22} &= \lambda\theta + 2\mu e_{22} \\ p_{33} &= \lambda\theta + 2\mu e_{33} \\ \theta &= e_{11} + e_{22} + e_{33} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p_{11} &= 2.40\cdot 10^{-4}\,bar \\ p_{22} &= 2.04\cdot 10^{-4}\,bar \\ p_{33} &= 2.04\cdot 10^{-4}\,bar \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= 2\mu e_{12} \\ p_{23} &= 2\mu e_{23} \\ p_{31} &= 2\mu e_{31} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p_{12} &= 3.60\cdot 10^{-5}\,bar \\ p_{23} &= 1.20\cdot 10^{-5}\,bar \\ p_{31} &= 1.20\cdot 10^{-5}\,bar \end{aligned}\right\}$$

(1 bar = 10^6 dyn/cm^2)

Άσκηση 3.5

Οι συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση σεισμικών κυμάτων μέσα σ' αυτό είναι:

$e_{11}=8*10^{-11}$, $e_{22}= e_{33} =5*10^{-11}$, $e_{12}= 3*10^{-11}$, $e_{12}=3*10^{-11}$, $e_{13}=e_{23}=10^{-11}$.

Να υπολογισθούν το μέτρο διατμητικής ελαστικότητας, ***n***, το μέτρο επιμήκους ελαστικότητας, ***E***, ο συντελεστής ελαστικότητας, ***1/E***, ο λόγος Poisson, ***σ*** και το μέτρο κυβικής ελαστικότητας, ***κ***.

Άσκηση 3.4:

$$p_{11} = 2.40 \cdot 10^{-4}\, bar \quad p_{22} = 2.04 \cdot 10^{-4}\, bar \quad p_{33} = 2.04 \cdot 10^{-4}\, bar$$

$$p_{12} = 3.60 \cdot 10^{-5}\, bar \quad p_{23} = 1.20 \cdot 10^{-5}\, bar \quad p_{31} = 1.20 \cdot 10^{-5}\, bar$$

$$n = \frac{p_{12}}{e_{12}} = 1.2 \cdot 10^{12}\, dyn / cm^2$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \Rightarrow \mathrm{E} = 15.43 \cdot 10^{11}\, dyn / cm^2, \qquad \frac{1}{E} = 6.48 \cdot 10^{-13}\, cm^2 / dyn$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \sigma = 0.29 \qquad \kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Rightarrow \kappa = 1.2 \cdot 10^{12}\, dyn / cm^2$$

Άσκηση 3.6

Στο βάθος των 2000 km μέσα στη γη οι σταθερές Lame έχουν τιμές $\lambda=3.5*10^{12} dyn/cm^2$ *και* $\mu=2.4*10^{12} dyn/cm^2$. Να υπολογισθούν στο βάθος αυτό: Το μέτρο επιμήκους ελαστικότητας, *E*, ο λόγος Poisson, *σ* και το μέτρο κυβικής ελαστικότητας, *κ*

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \Rightarrow \mathrm{E} = 6.22 \cdot 10^{12}\, dyn/cm^2$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \sigma = 0.30$$

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Rightarrow \kappa = 5.1 \cdot 10^{12}\, dyn/cm^2$$