

Ελαστικά Κύματα

Γη = υλικό με απόλυτα ελαστικές ιδιότητες =>
=>Σεισμικά κύματα = ελαστικά κύματα

ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ:

- 1) Τα πετρώματα είναι απόλυτα ελαστικά και ισότροπα μέσα
- 2) Οι ασκούμενες τάσεις είναι μικρές και σύντομες
- 3) Οι προκύπτουσες παραμορφώσεις των πετρωμάτων είναι επίσης μικρές

Η θεωρία ελαστικότητας είναι επαρκής για τη μελέτη των σεισμικών κυμάτων γιατί:

- 1) Οι περίοδοι των σεισμικών κυμάτων είναι σχετικά μικρές
- 2) Η διάρκεια των παραμορφώσεων των πετρωμάτων κατά τη διέλευση των σεισμικών κυμάτων μέσα από αυτά είναι σχετικά μικρή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται οι βασικές ιδιότητες των ελαστικών κυμάτων όταν αυτά διαδίδονται σε απόλυτα ελαστικό και ισότροπο μέσο

Εξίσωση του Κύματος

Έστω ποσότητα u (π.χ. θερμοκρασία) που μεταβάλλεται χωρικά και χρονικά.

Η διάδοση αυτής της μεταβολής (με ταχύτητα c) στο χώρο περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

που αποτελεί τη **γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος**

$\nabla^2 u =$ λαπλασιανή της $u =$ μεταβολή της u μεταξύ δύο γειτονικών σημείων.

Αν δεχθούμε διάδοση κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1 έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Διάδοση κατά τη διεύθυνση } x_1 \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$$

Εξίσωση του Κύματος (... συνέχεια)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \quad (1)$$

Γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:

$$u = f(x_1 - ct) + F(x_1 + ct)$$

όπου f και F είναι συναρτήσεις που ικανοποιούν τις αρχικές ορικές συνθήκες και παριστάνουν κύματα που διαδίδονται στη διεύθυνση του άξονα x_1 .

Ένα τέτοιο κύμα ονομάζεται επίπεδο κύμα γιατί σε κάθε χρονική στιγμή, t , η u έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία ενός επιπέδου κάθετου στον άξονα x_1 .

Η συνάρτηση $f(x_1 - ct)$ παριστάνει κύμα (διατάραξη) που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x_1 .

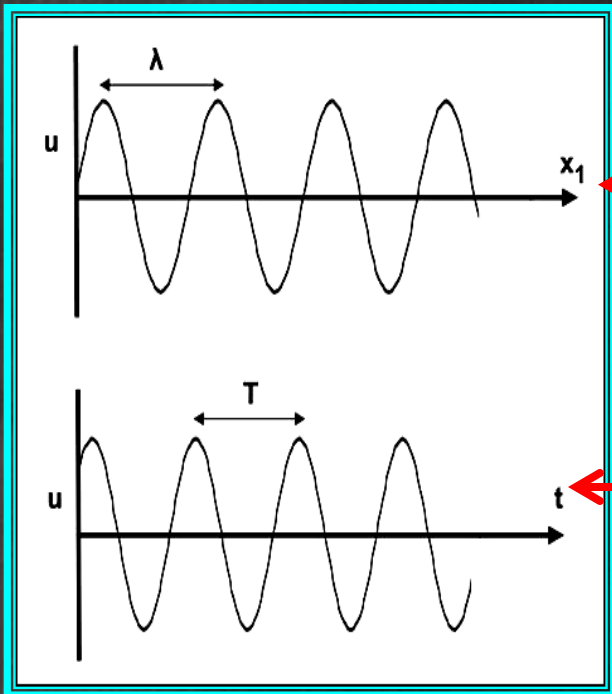
Η συνάρτηση $F(x_1 + ct)$ παριστάνει κύμα (διατάραξη) που διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα x_1 .

Ειδική λύση της (1) είναι και η εξίσωση απλού αρμονικού επίπεδου κύματος:

$$u = A \sigma \nu \nu \left[k (x_1 - ct) + \phi \right]$$

όπου, k ο κυματικός αριθμός, A το πλάτος του κύματος και ϕ η φάση.

Εξίσωση του Κύματος (... συνέχεια)



$$u = A \sigma \upsilon \nu \left[k(x_1 - ct) + \phi \right] = A \sigma \upsilon \nu (kx_1 - kct + \phi)$$

$$u = A \sigma \upsilon \nu (kx_1 + s_1) \quad (\omega \varsigma \text{ πρ} \omicron \varsigma \text{ χ} \omega \rho \omicron)$$

$$u = A \sigma \upsilon \nu (-kct + s_2) \quad (\omega \varsigma \text{ πρ} \omicron \varsigma \text{ χρ} \omicron \nu \omicron)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = A \eta \mu (kx_1 + 90 + s_1) \\ u = A \eta \mu (90 + kct - s_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u = A \eta \mu (kx_1 + s_3) \\ u = A \eta \mu (kct - s_4) \end{array} \right\}$$

$$\omega = kc \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = kc \Rightarrow T = \frac{2\pi}{kc}$$

Περίοδος

$$T = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \frac{2\pi}{kc} = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Μήκος κύματος

Από την παραπάνω εξίσωση του αρμονικού επίπεδου κύματος προκύπτουν τα εξής:

Σε κάθε χρονική στιγμή (t σταθερό) το μέγεθος u μεταβάλλεται αρμονικά με την απόσταση, x_1 .

Σε κάθε συγκεκριμένη θέση (x_1 σταθερό) το μέγεθος u μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο, t .

Εξίσωση Διανυσματικού Κύματος

Αν η διατάραξη (η μεταβαλλόμενη στο χώρο και χρόνο ποσότητα) που διαδίδεται σε ένα μέσο υπό μορφή κύματος έχει διανυσματικό χαρακτήρα τότε έχουμε διάδοση διανυσματικού κύματος. Αν η διαδιδόμενη διανυσματική ποσότητα έχει συνιστώσες u_1, u_2, u_3 τότε για κάθε μία από αυτές ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= c^2 \nabla^2 u_1 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= c^2 \nabla^2 u_2 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= c^2 \nabla^2 u_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \end{aligned} \right\}$$

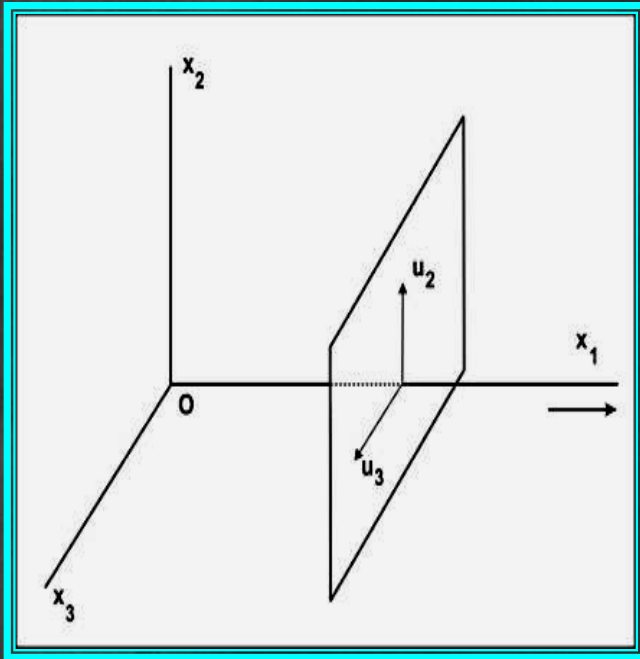
Θεωρούμε:

- α) Διάδοση διατάραξης μόνο κατά τη διεύθυνση x_1
- β) Μεταβολή των u_1, u_2, u_3 μόνο κατά τη διεύθυνση x_1 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Επίπεδο διανυσματικό κύμα

Εξίσωση Διανυσματικού Κύματος (... συνέχεια)



Αν στο επίπεδο διανυσματικό κύμα εφαρμοστεί και ο περιορισμός:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot u = \text{div} u_i = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

σε κάθε σημείο και για κάθε χρονική στιγμή, τότε ισχύουν μόνο οι σχέσεις:

Έχουμε λοιπόν **επίπεδο διανυσματικό κύμα, πολωμένο, κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1 .**

Αφού κατά τη διάδοση αυτού του κύματος έχουμε μόνο τις συνιστώσες u_2 και u_3 η διατάραξη πραγματοποιείται σε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος (π.χ. εγκάρσια κύματα).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \end{aligned} \right\}$$

Στάσιμα Κύματα

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \quad (1)$$

Έστω ότι έχουμε διάδοση μιας διατάραξης u κατά τη διεύθυνση x_1 . Η ποσότητα u μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη x_1 και με το χρόνο t (σχέση 1).

Ας υποθέσουμε ότι η ποσότητα u μπορεί να εκφραστεί από το γινόμενο δύο συναρτήσεων, μιας ως προς την απόσταση, $X(x_1)$ και μιας ως προς το χρόνο, $T(t)$, δηλαδή:

$$u = X(x_1) \cdot T(t) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = X(x_1) \cdot T'(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} = X'(x_1) \cdot T(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x_1) \cdot T''(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = X''(x_1) \cdot T(t) \end{array} \right\} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -C$$

$$\left. \begin{array}{l} X''(x_1) = -CX(x_1) \\ T''(t) = -Cc^2 T(t) \\ K = Cc^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X''(x_1) + CX(x_1) = 0 \\ T''(t) + KT(t) = 0 \end{array} \right\} (2)$$

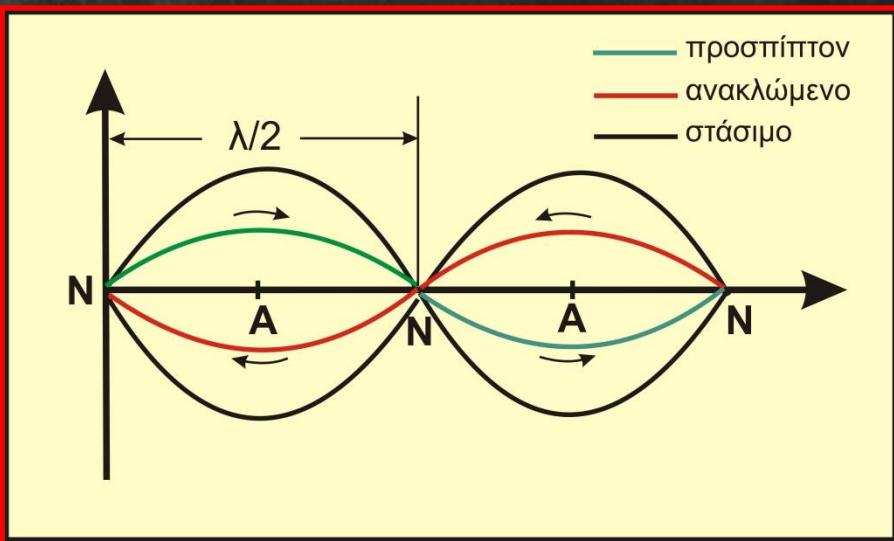
Αν οι (2) ικανοποιούνται τότε η $u = X(x_1) \cdot T(t)$ αποτελεί λύση της (1)

Στάσιμα Κύματα (... συνέχεια)

$$u = X(x_1) \cdot T(t) \quad (1)$$

Στα σημεία όπου η $X(x_1) \rightarrow 0$ η μετάθεση, u , μηδενίζεται για όλους τους χρόνους, t . Υπάρχουν, δηλαδή, κάποια σημεία πάνω στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος στα οποία, για όλους τους χρόνους, δεν υπάρχει μετάθεση (**κόμβοι**).

Το κύμα αυτό ονομάζεται **στάσιμο κύμα**



Προσπίπτον $u_1 = A \sigma \upsilon \nu [k(x_1 - ct)]$
(διάδοση κατά τη θετική φορά του άξονα)

Ανακλώμενο $u_2 = A \sigma \upsilon \nu [k(x_1 + ct)]$
(διάδοση κατά την αρνητική φορά του άξονα)

Στάσιμο : $u = u_1 + u_2 = 2A \sigma \upsilon \nu (kx_1) \cdot \sigma \upsilon \nu (kct)$

Δηλαδή, σχέση της μορφής (1)

Εφαρμογή 4.1

Να δειχθεί ότι η $u_1 = A \sigma\upsilon\nu[k(x_1 - ct) + \phi]$ αποτελεί λύση της

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= A k c \eta\mu(kx_1 - kct + \phi) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A k^2 c^2 \sigma\upsilon\nu(kx_1 - kct + \phi) \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} &= -A k \eta\mu(kx_1 - kct + \phi) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -A k^2 \sigma\upsilon\nu(kx_1 - kct + \phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}}$$

Εφαρμογή 4.2

Αρμονικό κύμα $u_1 = A \sigma\upsilon\nu[k(x-ct)]$ προσπίπτει σε επιφάνεια και ανακλάται. Το ανακλώμενο και το προσπίπτον συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση του ανακλώμενου είναι η $u_2 = A \sigma\upsilon\nu[k(x+ct)]$ και του στάσιμου η $u = 2A \sigma\upsilon\nu(kx) \cdot \sigma\upsilon\nu(kct)$

Ανακλώμενο :

Απώλεια ενέργειας = 0 \Rightarrow πλάτος ανακλώμενου = πλάτος προσπίπτοντος, (A). Η φάση του προσπίπτοντος είναι $k(x-ct)$. Αφού το ανακλώμενο διαδίδεται προς την αντίθετη φορά θα έχει φάση $k(x+ct)$

Άρα η εξίσωση του ανακλώμενου θα είναι: $u_2 = A \sigma\upsilon\nu[k(x+ct)]$

Στάσιμο :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Προσπίπτον : } u_1 = A \sigma\upsilon\nu [k(x-ct)] \\ \text{Ανακλώμενο : } u_2 = A \sigma\upsilon\nu [k(x+ct)] \\ \text{Στάσιμο : } u = u_1 + u_2 \end{array} \right\} \Rightarrow u = A \sigma\upsilon\nu [k(x-ct)] + A \sigma\upsilon\nu [k(x+ct)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = A [\sigma\upsilon\nu(kx) \cdot \sigma\upsilon\nu(kct) + \eta\mu(kx) \cdot \eta\mu(kct) + \sigma\upsilon\nu(kx) \cdot \sigma\upsilon\nu(kct) - \eta\mu(kx) \cdot \eta\mu(kct)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2A \sigma\upsilon\nu(kx) \cdot \sigma\upsilon\nu(kct)$$

Ελαστικά Κύματα Χώρου

Διαφορική εξίσωση κίνησης υλικών σημείων ενός ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση μιας διατάραξης κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 (κεφάλαιο 3):

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1$$

Διάδοση μεταβολής όγκου (ή πυκνότητας) του μέσου διάδοσης
=> συμπίεσεις/αραιώσεις
(επιμήκη ελαστικά κύματα)

Διάδοση εγκάρσιας παραμόρφωσης του μέσου διάδοσης
=> μεταβολή σχήματος
(εγκάρσια ελαστικά κύματα)

A. Επιμήκη Κύματα

Εξισώσεις διάδοσης διατάραξης κατά τη διεύθυνση των x_1, x_2, x_3 :

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3$$

Διαφορίζουμε :

την 1^η ως προς x_1
τη 2^η ως προς x_2
την 3^η ως προς x_3

και αθροίζουμε...

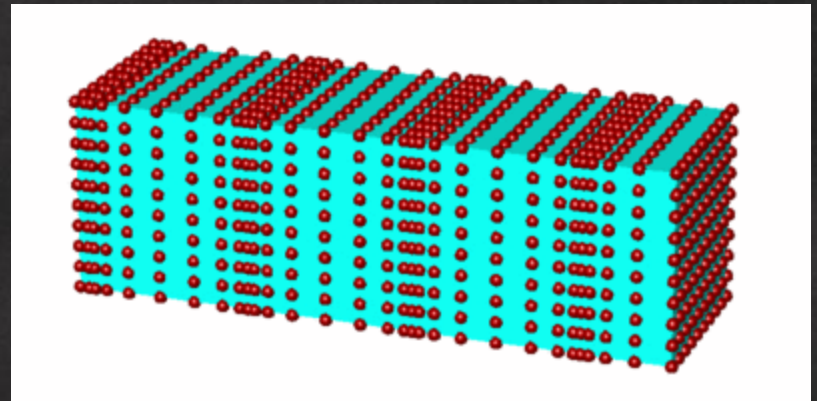
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \theta$$

**Διαφορική εξίσωση των
επιμήκων κυμάτων**

Συγκρίνοντάς την με τη γενική εξίσωση του κύματος $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$ προκύπτει ότι:

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Rightarrow c = \alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Αν η φορά ταλάντωσης ταυτίζεται με τη φορά διάδοσης τότε έχουμε συμπιέσεις (C) ενώ αν η φορά είναι αντίθετη έχουμε αραιώσεις (D).



B. Εγκάρσια Κύματα

Είναι πολωμένα επίπεδα κύματα που ταλαντώνουν μόνο στο επίπεδο που είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσής τους.

Έτσι αν θεωρήσουμε διάδοση κατά τη διεύθυνση του x_1 θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3$$

Διαφορίζουμε :

την 1^η ως προς x_3

την 2^η ως προς x_2

και αθροίζουμε...

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w_i$$

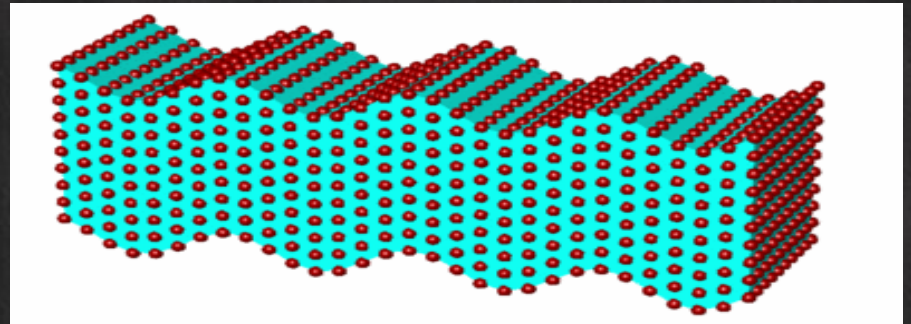
όπου $w_i = \text{rot } u_i$

Διαφορική εξίσωση των εγκαρσίων κυμάτων

Συγκρίνοντάς την με τη γενική εξίσωση του κύματος $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$ προκύπτει ότι:

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow c = \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

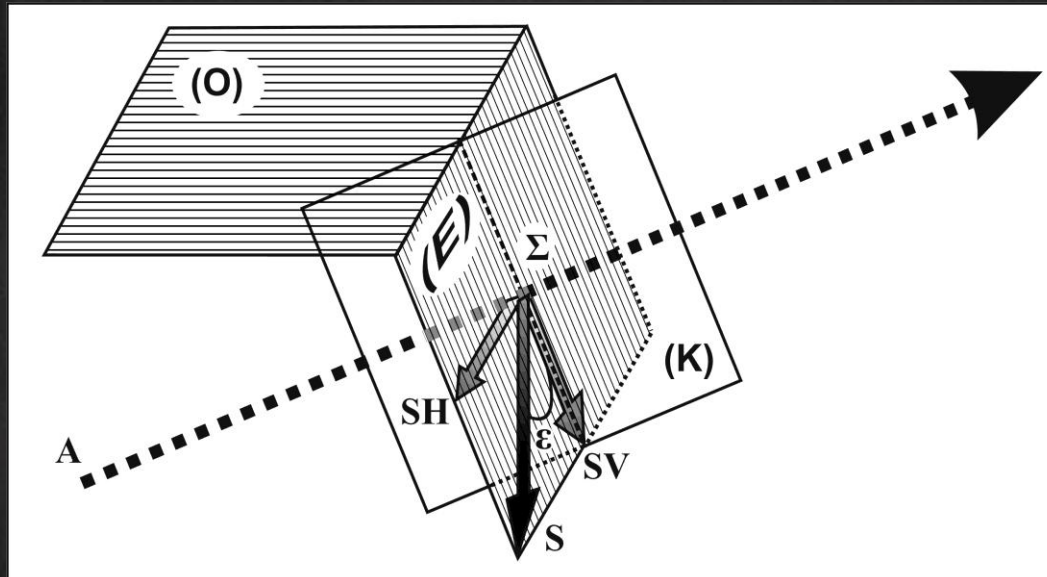
Άρα, $\beta < \alpha$



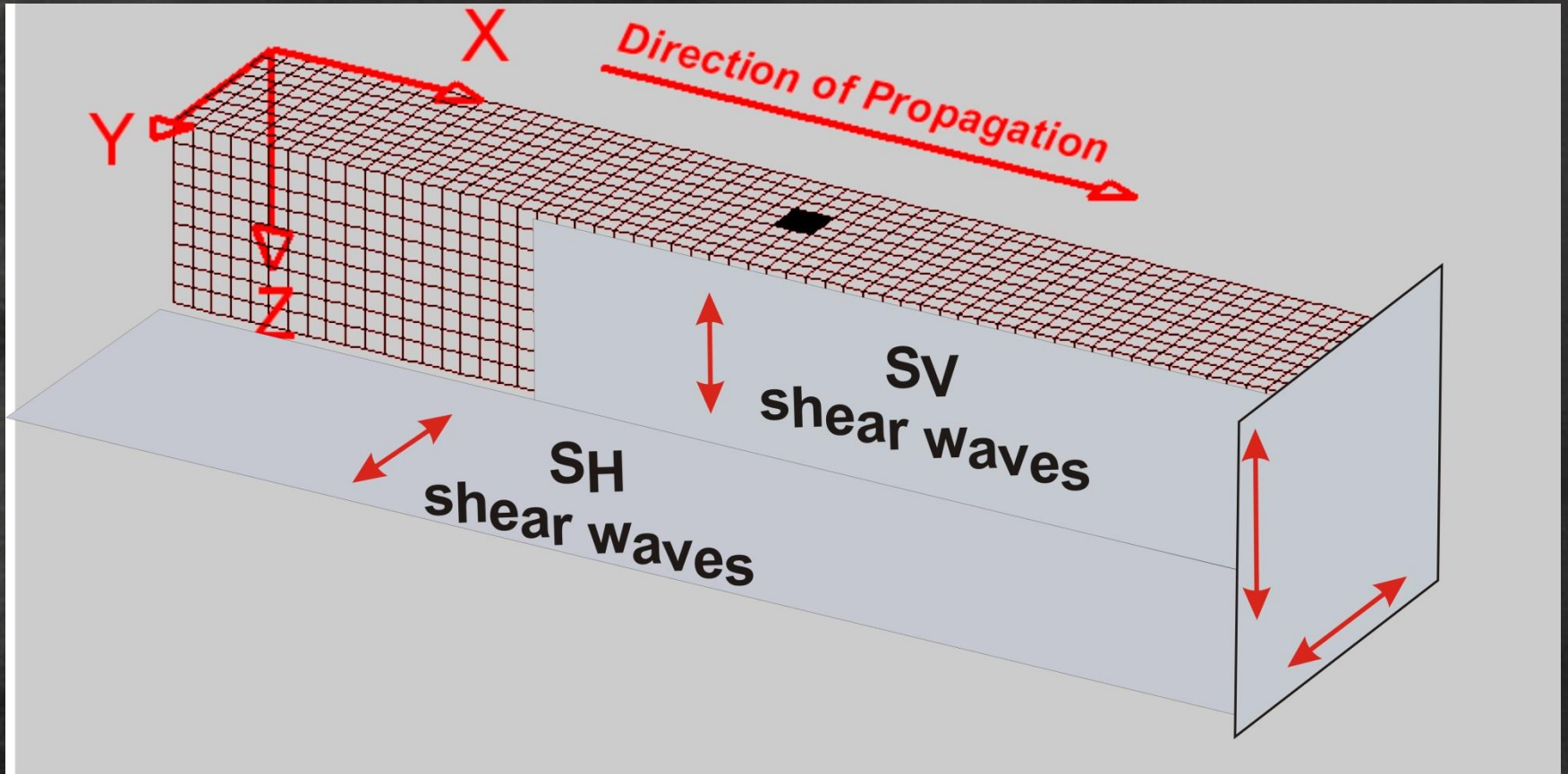
B. Εγκάρσια Κύματα (... συνέχεια)

Ιδιότητες (4)

- 1) Στα ρευστά το μέτρο ακαμψίας ($n=2\mu$) είναι μηδέν και κατ' επέκταση, $\mu=0$.
Άρα στα ρευστά δε διαδίδονται εγκάρσια κύματα
- 2) Τα υλικά σημεία ταλαντώνονται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.
- 3) Άρα το μέσο κατά τη διάδοση των S- παθαίνει μόνο διατμητική παραμόρφωση
- 4) Το διάνυσμα μετάθεσης των S- αναλύεται σε δύο συνιστώσες που ορίζονται:
 - α) από την τομή του επιπέδου (E) (\perp στην ακτίνα) με οριζόντιο επίπεδο, (O), **(οριζόντια συνιστώσα, SH)**
 - β) από την τομή του επιπέδου (E) (\perp στην ακτίνα) με το κατακόρυφο επίπεδο, (K), που περιέχει την ακτίνα **(κατακόρυφη συνιστώσα, SV)**



SH (οριζόντια πολωμένα κύματα)



SV (κατακόρυφα πολωμένα κύματα)

Άσκηση 4.1

Να γραφεί η εξίσωση του απλού αρμονικού επίπεδου κύματος σε συνάρτηση με το μήκος κύματος, λ και την περίοδο, T .

$$\left. \begin{aligned} u &= A \sigma \nu \nu \left[k (x_1 - ct) + \phi \right] \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ T &= \frac{2\pi}{kc} \Rightarrow c = \frac{\lambda}{T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = A \sigma \nu \nu \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(x_1 - \frac{\lambda}{T} t \right) + \phi \right]$$

Άσκηση 4.2

Να αποδειχθεί ότι:

- α) οι συναρτήσεις $f(x_1 - ct)$ και $F(x_1 + ct)$ αποτελούν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης επίπεδου κύματος που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1 και ότι
β) η 1^η περιγράφει κύμα που διαδίδεται κατά τη **θετική φορά** του x_1 , ενώ η 2^η περιγράφει κύμα που διαδίδεται κατά την **αρνητική φορά** του x_1
-

α) Διαφορική εξίσωση επίπεδου κύματος που διαδίδεται κατά τη x_1 : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f(x_1 - ct)}{\partial t} = \frac{\partial f(x_1 - ct)}{\partial (x_1 - ct)} \cdot \frac{\partial (x_1 - ct)}{\partial t} = -cf'(x_1 - ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c \frac{\partial [f'(x_1 - ct)]}{\partial t} = -c \frac{\partial [f'(x_1 - ct)]}{\partial (x_1 - ct)} \cdot \frac{\partial (x_1 - ct)}{\partial t} = c^2 f''(x_1 - ct)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1 - ct)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1 - ct)}{\partial (x_1 - ct)} \cdot \frac{\partial (x_1 - ct)}{\partial x_1} = f'(x_1 - ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial [f'(x_1 - ct)]}{\partial x_1} = \frac{\partial [f'(x_1 - ct)]}{\partial (x_1 - ct)} \cdot \frac{\partial (x_1 - ct)}{\partial x_1} = f''(x_1 - ct)$$

Άσκηση 4.2 (... συνέχεια)

β) Αν ο αρχικός χρόνος είναι t , μετά από χρόνο δt ο συνολικός χρόνος θα είναι $t+\delta t$

Άρα στον αρχικό χρόνο t οι συναρτήσεις f και F θα είναι αντίστοιχα:

$$f(x_1-ct) \text{ και } F(x_1+ct)$$

Στη χρονική στιγμή $t+\delta t$:

η f θα διανύσει απόσταση $x_1+c\delta t$ (δεχόμαστε διάδοση κατά τη θετική φορά του x_1)

η F » » » $x_1-c\delta t$ (» » » την αρνητική » » x_1)

οπότε οι συναρτήσεις f και F θα γίνουν:

$$f[x_1+c\delta t-c(t+\delta t)] = f(x_1+c\delta t-ct-c\delta t) = f(x_1-ct)$$

$$F[x_1-c\delta t+c(t+\delta t)] = F(x_1-c\delta t+ct+c\delta t) = F(x_1+ct)$$

Εφ' όσον οι τιμές τους μένουν αμετάβλητες η υπόθεση ότι οι f και F περιγράφουν διάδοση κατά τη θετική και αρνητική φορά του άξονα x_1 , αντίστοιχα, είναι αληθής.

Άσκηση 4.4

Σε ελαστικό και ισότροπο μέσο πυκνότητας $\rho=2.7 \text{ gr/cm}^3$ οι ταχύτητες διάδοσης των P- και S- κυμάτων είναι $\alpha=6.0 \text{ km/sec}$ και $\beta=3.4 \text{ km/sec}$. Να βρεθούν οι σταθερές Lamé, λ και μ , το μέτρο επιμήκους ελαστικότητας, E , ο λόγος Poisson, σ , το μέτρο κυβικής ελαστικότητας, κ

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \Rightarrow \mu = 3.12 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \Rightarrow \lambda = 3.48 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\mu + \lambda} \Rightarrow E = 7.89 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \sigma = 0.26$$

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Rightarrow \kappa = 5.56 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

Άσκηση 4.5

Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των σταθερών C και K των σχέσεων που ακολουθούν (4.10)

$$\left. \begin{array}{l} X''(x_1) + CX(x_1) = 0 \\ T''(t) + KT(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = -C \\ \frac{T''(t)}{T(t)} = -K \end{array} \right\}$$

$$\frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} \Rightarrow C = \frac{K}{c^2} \Rightarrow K = Cc^2$$

Άσκηση 4.6

Να αποδειχθεί ότι η $u = A \sigma \nu \nu \left(x_1 \frac{\omega}{c} \right) \eta \mu (\omega t)$

ω = κυκλική συχνότητα
 c = ταχύτητα διάδοσης του κύματος

περιγράφει στάσιμο κύμα. Στη συνέχεια να βρεθούν οι σταθερές C και K .

Για να περιγράφει στάσιμο κύμα θα πρέπει να ισχύει: $\frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -C$

$$\left. \begin{array}{l} X(x_1) = A \sigma \nu \nu \left(x_1 \frac{\omega}{c} \right) \\ T(t) = \eta \mu (\omega t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X'(x_1) = -A \frac{\omega}{c} \eta \mu \left(x_1 \frac{\omega}{c} \right) \\ T'(t) = \omega \sigma \nu \nu (\omega t) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} X''(x_1) = -A \frac{\omega^2}{c^2} \sigma \nu \nu \left(x_1 \frac{\omega}{c} \right) \\ T''(t) = -\omega^2 \eta \mu (\omega t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = -\frac{\omega^2}{c^2} \\ \frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}$$

Άρα περιγράφει στάσιμο κύμα

Άσκηση 4.6 (... συνέχεια)

Έχουμε βρει ότι για το στάσιμο κύμα της άσκησης ισχύουν οι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = -\frac{\omega^2}{c^2} \\ \frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 \end{array} \right.$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για τα στάσιμα κύματα ισχύουν οι:

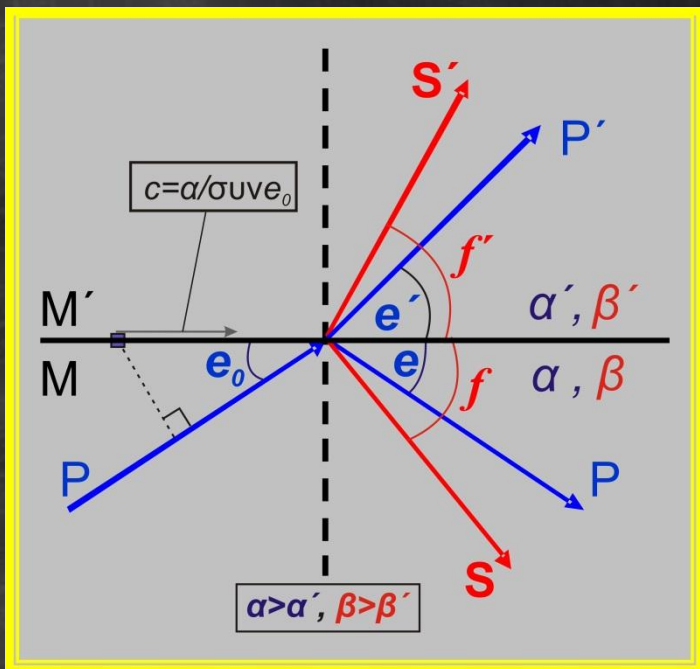
$$\left. \begin{array}{l} X''(x_1) + CX(x_1) = 0 \\ T''(t) + KT(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = -C \\ \frac{T''(t)}{T(t)} = -K \end{array} \right.$$

Άρα τελικά :

$$C = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad K = \omega^2$$

Ανάκλαση και Διάθλαση Κυμάτων Χώρου



Βασικές αρχές που διέπουν τη διάδοση των ελαστικών κυμάτων χώρου:

ΑΡΧΗ HUYGENS:

“Κάθε σημείο ενός μετώπου κύματος μπορεί να θεωρηθεί πηγή νέου (δευτερογενούς) κύματος”

ΑΡΧΗ FERMAT:

“Το κύμα κατά τη διαδρομή του ακολουθεί το συντομότερο δρόμο, δηλαδή, αυτόν που απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο”

Σεισμική ακτίνα κύματος P προσπίπτει με ταχύτητα α και υπό γωνία e_0 (γωνία πρόσπτωσης) στην ασυνέχεια που χωρίζει δύο ομογενή και ισότροπα μέσα, M και M'.

Η ταχύτητα με την οποία κινείται η τομή του οριζόντιου επιπέδου με το επίπεδο του κύματος (επίπεδο κάθετο στη σεισμική ακτίνα) θα είναι $\alpha / \sin e_0$

Γενικευμένος Νόμος του SNELL: “Η ταχύτητα κίνησης της τομής του επιπέδου του κύματος με τη διαχωριστική επιφάνεια είναι σταθερή”

$$\frac{\alpha}{\sin e_0} = \frac{\alpha}{\sin e} = \frac{\beta}{\sin f} = \frac{\alpha'}{\sin e'} = \frac{\beta'}{\sin f'} = C$$

P → P, SV
SV → P, SV
SH → SH

Επιφανειακά Κύματα

ΣΥΝΘΗΚΕΣ (ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ):

- 1) Η Γη έχει περιορισμένες διαστάσεις
- 2) Η επιφάνεια της Γης αποτελεί μια ασυνέχεια που τη χωρίζει από την ατμόσφαιρα που θεωρείται ελαστικό στρώμα με διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες από τη Γη
- 3) Τα επιφανειακά στρώματα της Γης δεν είναι απολύτως ισότροπα

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ:

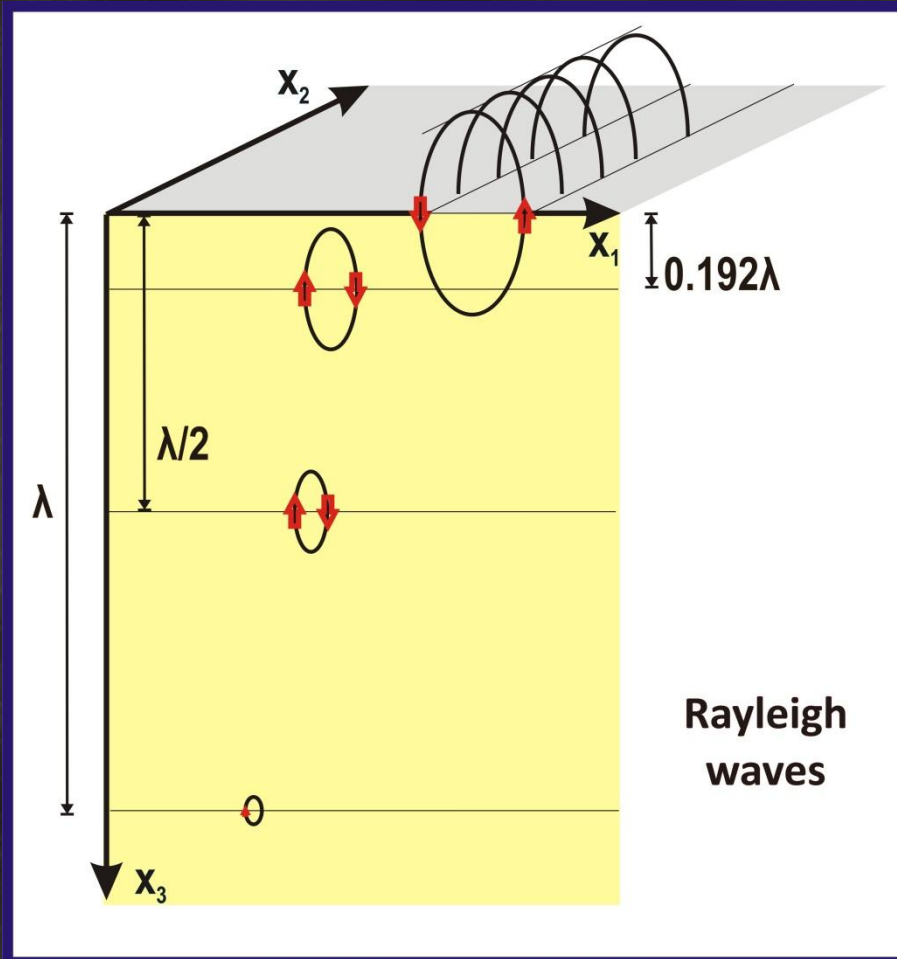
Δημιουργία κυμάτων που ακολουθούν την επιφάνεια της Γης.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

- Τα κύματα αυτά έχουν μεγάλα πλάτη στην επιφάνεια της Γης αλλά μειώνονται με το βάθος.
- Διακρίνονται σε δύο είδη, στα κύματα **RAYLEIGH** και στα κύματα **LOVE**

A. Κύματα Rayleigh

Έστω το οριζόντιο επίπεδο Ox_1x_2 που χωρίζει ένα ομογενές και ισότροπο ελαστικό μέσο από το κενό. Με κατάλληλη διέγερση είναι δυνατό να παραχθούν ελαστικά κύματα που διαδίδονται κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 και έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες:



α) είναι επιφανειακά κύματα, δηλαδή, τα πλάτη των κινήσεων των υλικών σημείων ελαττώνονται γρήγορα με το βάθος

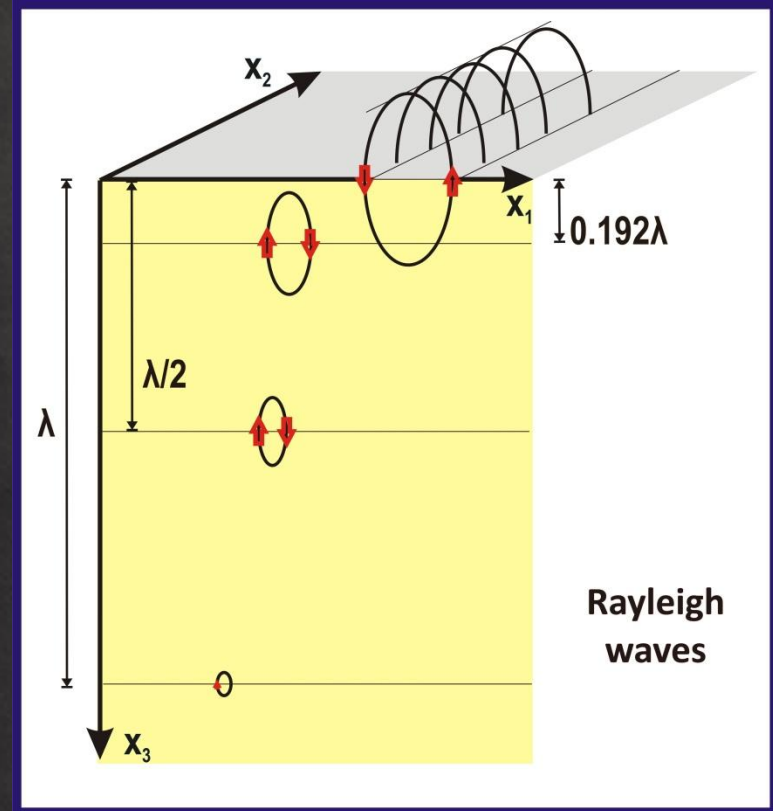
β) ταλαντώνουν πάνω στο επίπεδο Ox_1x_3 έτσι ώστε σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή οι μεταθέσεις των υλικών σημείων τα οποία βρίσκονται σε ευθείες παράλληλες του άξονα Ox_2 είναι ίσες.

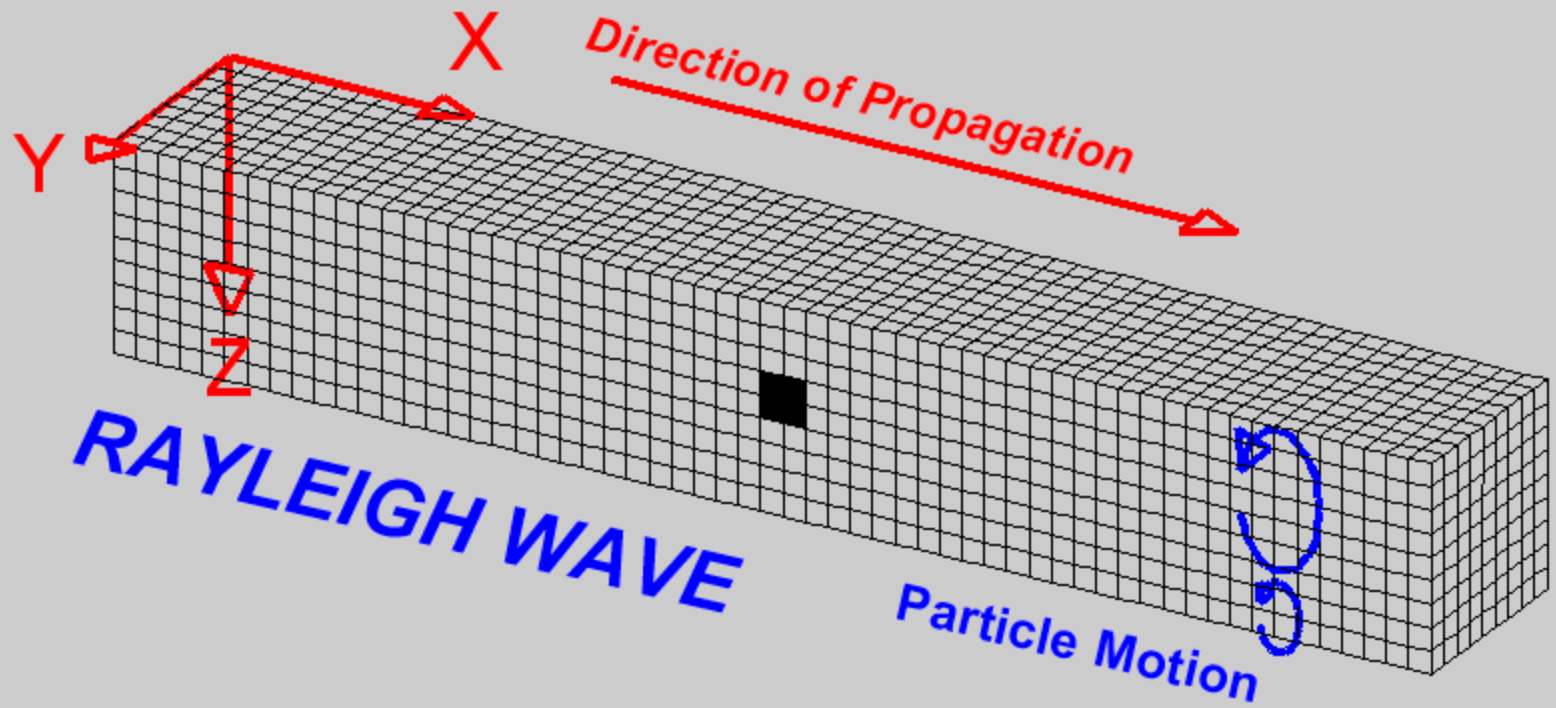
Τα κύματα αυτά λέγονται **κύματα Rayleigh**.

Κύματα Rayleigh (... συνέχεια)

Άλλες ιδιότητες των κυμάτων Rayleigh:

- 1) Αφού ταλαντώνουν πάνω στο επίπεδο Ox_1x_3 η συνιστώσα μετάθεσης $u_2=0$. Οι συνιστώσες u_1, u_3 παρουσιάζουν διαφορά φάσης με αποτέλεσμα **τα υλικά σημεία να πραγματοποιούν ελλειπτικές κινήσεις στο επίπεδο Ox_1x_3** .
- 2) **Κοντά στην επιφάνεια** ο μεγάλος ημιάξονας της κάθε έλλειψης είναι παράλληλος προς τον Ox_3 ενώ ο μικρός προς τον Ox_1 . Η **φορά της ελλειπτικής κίνησης είναι αντίστροφη της φοράς διάδοσης του κύματος**.
- 3) Σε **βάθος ίσο με το μήκος κύματος, λ** , τα **πλάτη σχεδόν μηδενίζονται**, ενώ σε βάθος ίσο με **0.192λ** η **φορά της ελλειπτικής κίνησης αντιστρέφεται** και γίνεται ίδια με τη φορά διάδοσης του κύματος





Κύματα Rayleigh (... συνέχεια)

Αν α και β είναι οι ταχύτητες διάδοσης των Ρ- και S- κυμάτων αντίστοιχα, η ταχύτητα διάδοσης, c , των Rayleigh προκύπτει από τις ρίζες της εξίσωσης:

$$f = \frac{c^6}{\beta^6} - 8 \frac{c^4}{\beta^4} + c^2 \left(\frac{24}{\beta^2} - \frac{16}{\alpha^2} \right) - 16 \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για } c = 0 \Rightarrow f = -16 \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \quad (< 0) \\ \text{Για } c = \beta \Rightarrow f = 1 \quad (> 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Υπάρχει λύση της } f \text{ για } 0 < c < \beta$$

Αν ισχύει ότι $\lambda = \mu$ (σχέση Poisson) τότε $\alpha = \beta \sqrt{3}$

$$(1) \Rightarrow f = \frac{c^6}{\beta^6} - 8 \frac{c^4}{\beta^4} + \frac{56}{3} \frac{c^2}{\beta^2} - \frac{32}{3} = 0$$

Κύματα Rayleigh (... συνέχεια)

$$f = \frac{c^6}{\beta^6} - 8 \frac{c^4}{\beta^4} + \frac{56}{3} \frac{c^2}{\beta^2} - \frac{32}{3} = 0$$

Ρίζες οι: $c^2/\beta^2=4$, $c^2/\beta^2 = 2 + 2\sqrt{3}$, $c^2/\beta^2 = 2 - 2\sqrt{3}$

Επειδή $0 < c < \beta$ αποδεκτή μόνο η

$$\begin{aligned} c^2/\beta^2 &= 2 - 2\sqrt{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow c &= 0.9194\beta \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η c είναι ανεξάρτητη της περιόδου.

Επειδή όμως στην πραγματικότητα ο *ημιχώρος δεν είναι ομογενής*, η c εξαρτάται από την περίοδο, δηλαδή, τα κύματα Rayleigh σκεδάζονται₂₉

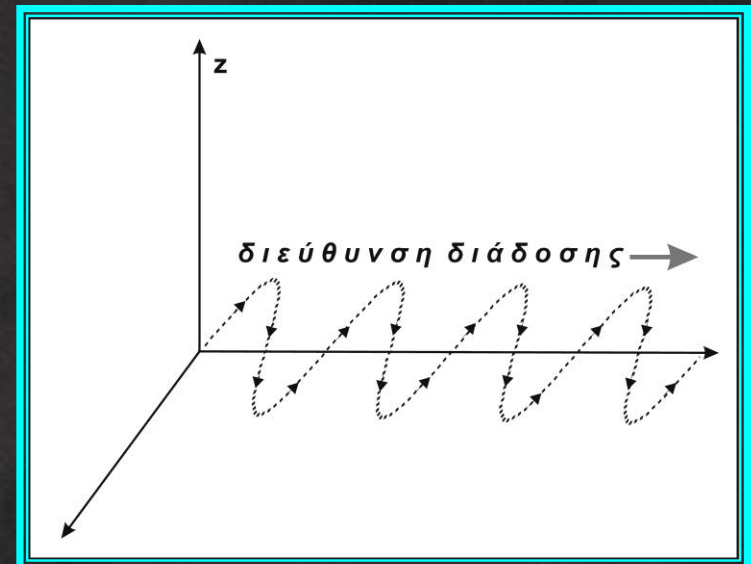
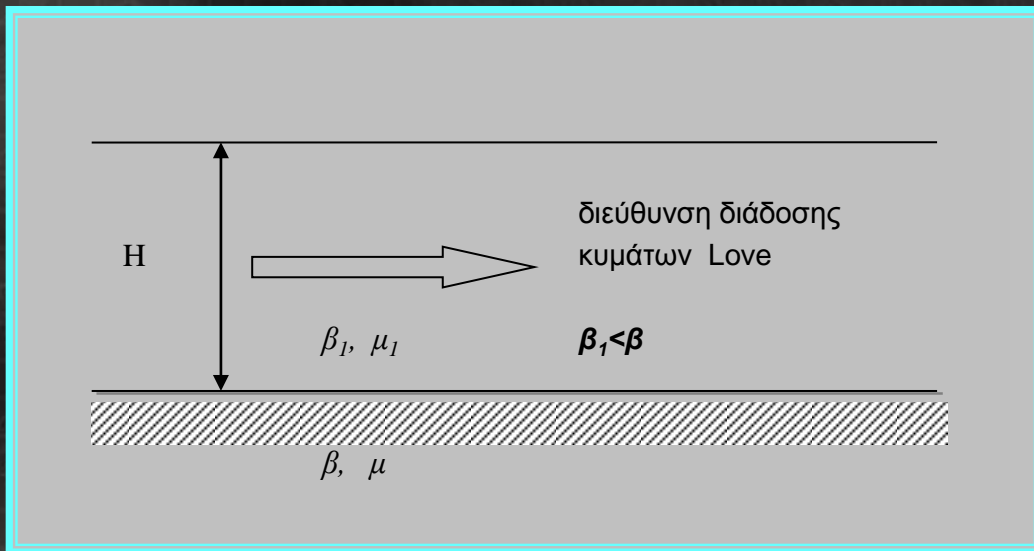
B. Κύματα Love

Δημιουργούνται όταν ένα **στρώμα ορισμένου πάχους** (H) υπέρκειται ενός **ημιχώρου** που έχει διαφορετικές φυσικές ιδιότητες και **μεγαλύτερη ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιων κυμάτων** (β).

Κατά τη διάδοση τέτοιου κύματος τα υλικά σημεία **κραδαίνουν στο οριζόντιο επίπεδο**, κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Πρόκειται στην πράξη για **γραμμικά πολωμένα εγκάρσια κύματα** που έχουν μόνο SH συνιστώσα.

Προκύπτουν από **εποικοδομητική συμβολή SH κυμάτων** που ανακλώνται διαδοχικά στις οριζικές επιφάνειες του στρώματος



Κύματα Love (...συνέχεια)

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων Love προκύπτει από την παρακάτω σχέση που ονομάζεται **εξίσωση περιόδου**:

$$\mu \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta^2}} - \mu_1 \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1} \cdot \varepsilon \phi \left(\kappa H \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1} \right) = 0 \quad (1)$$

όπου $\beta_1 < c < \beta$ (απαραίτητη προϋπόθεση για τη δημιουργία κυμάτων Love).

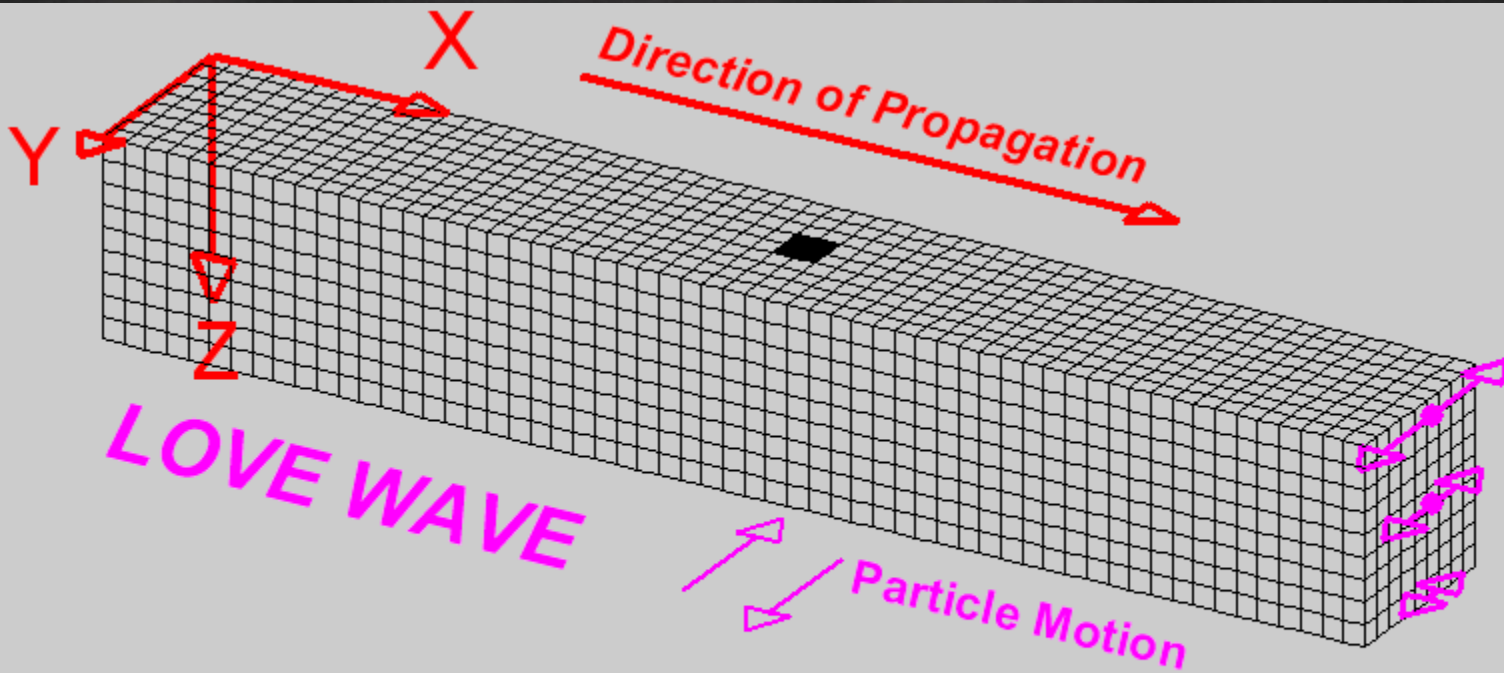
Η c είναι συνάρτηση του κυματάριθμου, $\kappa (=2\pi/cT)$ και κατ' επέκταση της περιόδου. Άρα τα κύματα Love σκεδάζονται.

$$\text{Θέτουμε } s = \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}, \quad \text{οπότε (1)} \Rightarrow \mu \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta^2}} = \mu_1 s \cdot \varepsilon \phi(\kappa H s)$$

Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο την ποσότητα $\kappa H s$ τότε: $\kappa H s = \phi + n\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

Υπάρχει επομένως σειρά κυμάτων διάφορων κυματάριθμων που έχουν την ίδια ταχύτητα, c .

Έτσι, για $n=0$ έχουμε τη **θεμελειώδη ταλάντωση**, για $n=1$ την **1^η αρμονική**, για $n=2$ τη **2^η αρμονική** κ.ο.κ



Κύματα Love (...συνέχεια)

Αποδεικνύεται (ασκ. 4.8) ότι :

$$\beta_1 < c < \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \nu T \rightarrow \max \Rightarrow \kappa \rightarrow \min \Rightarrow c \rightarrow \max \Rightarrow c \rightarrow \beta \text{ (ταχύτητα ημιχώρου)} \\ \alpha \nu T \rightarrow \min \Rightarrow \kappa \rightarrow \max \Rightarrow c \rightarrow \min \Rightarrow c \rightarrow \beta_1 \text{ (ταχύτητα στρώματος)} \end{cases}$$

Επομένως, η ταχύτητα των μεγάλης περιόδου κυμάτων ενός αρμονικού προσεγγίζει την ταχύτητα του ημιχώρου (βαθύτερα στρώματα της Γης).

Αντίθετα, η ταχύτητα των μικρής περιόδου κυμάτων ενός αρμονικού προσεγγίζει την ταχύτητα του στρώματος (επιφανειακά στρώματα της Γης).

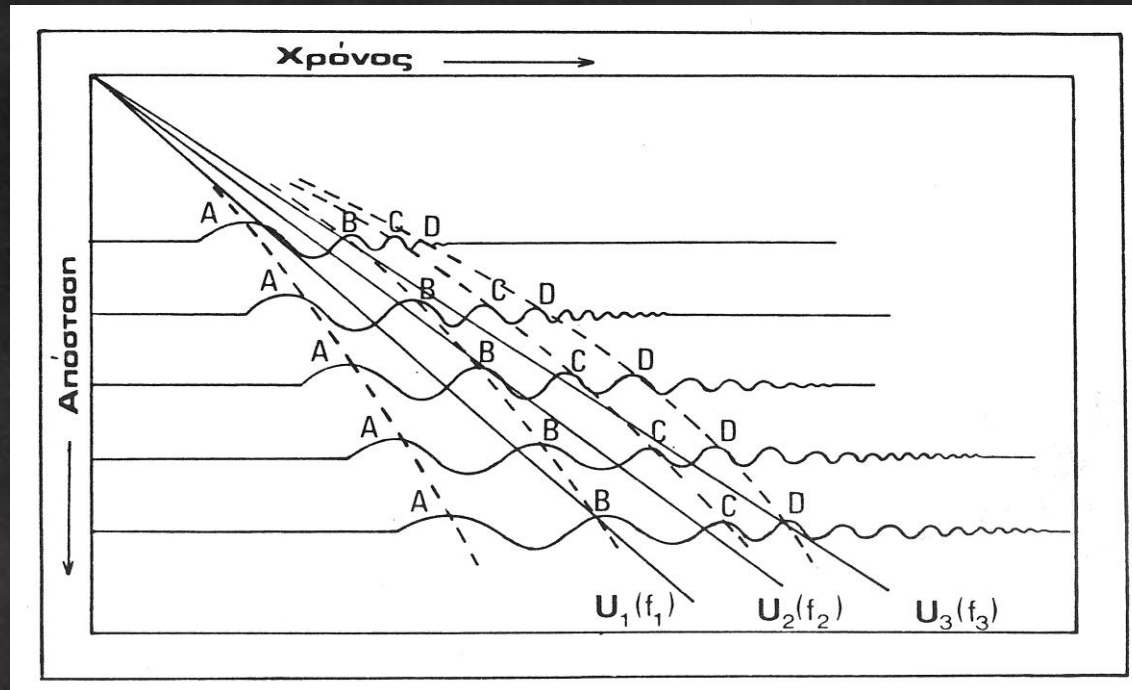
Σκέδαση επιφανειακών κυμάτων

Σκέδαση κύματος έχουμε όταν η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από την περίοδό του.

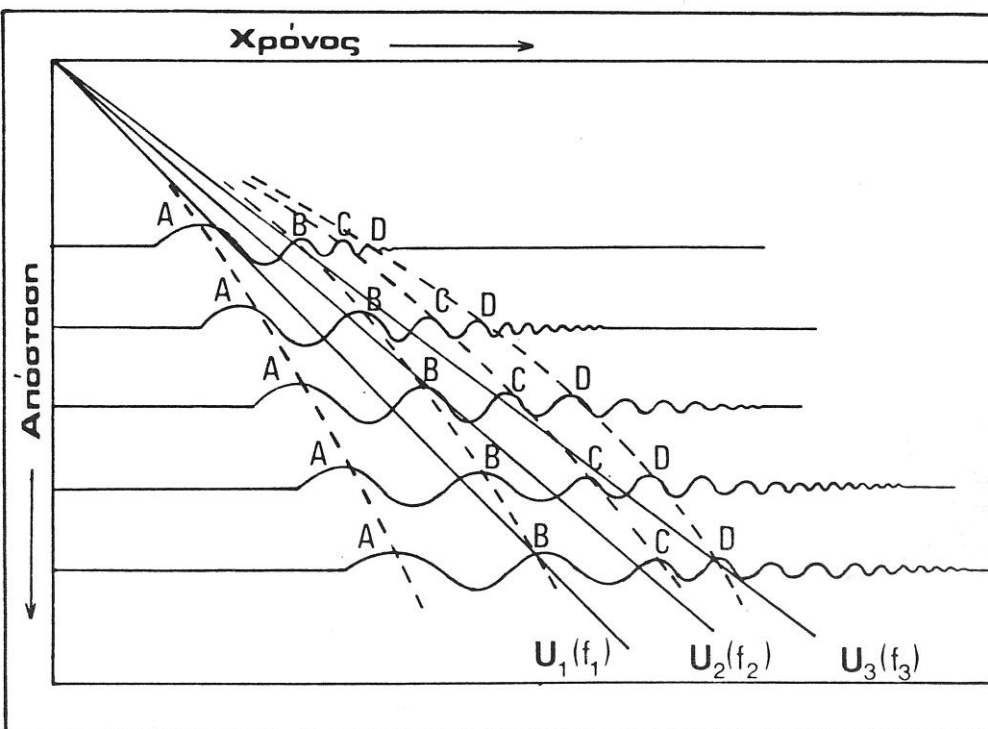
Αν η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος **αυξάνεται** ή **μειώνεται** με την **αύξηση της περιόδου** τότε η σκέδαση είναι **κανονική** ή **ανάστροφη**, αντίστοιχα.

Τόσο τα κύματα **Rayleigh** όσο και τα κύματα **Love** σκεδάζονται.

Η διάρκεια των επιφανειακών κυμάτων (**SW**) μεγαλώνει με την επικεντρική απόσταση. Αυτό οφείλεται στην **κανονική σκέδαση** που έχει ως αποτέλεσμα να φτάνουν **πρώτα τα μεγάλης περιόδου SW**, ενώ με την πάροδο του χρόνου φτάνουν όλο και μικρότερης περιόδου **SW** που αναπτύσσονται με την απόσταση.



Σκέδαση επιφανειακών κυμάτων (...συνέχεια)



Οι ευθείες γραμμές ενώνουν σημεία που αντιστοιχούν στην ίδια ομάδα κύματος που χαρακτηρίζεται από ίδια τιμή περιόδου.

Η κλίση της είναι σταθερή άρα η κάθε **ομάδα κύματος** διαδίδεται με **σταθερή ταχύτητα** που είναι:

$$U = \frac{\Delta}{t}$$

Η ταχύτητα (κλίση της ευθείας) μειώνεται όσο μικραίνει η περίοδος. Άρα *κανονική σκέδαση*.

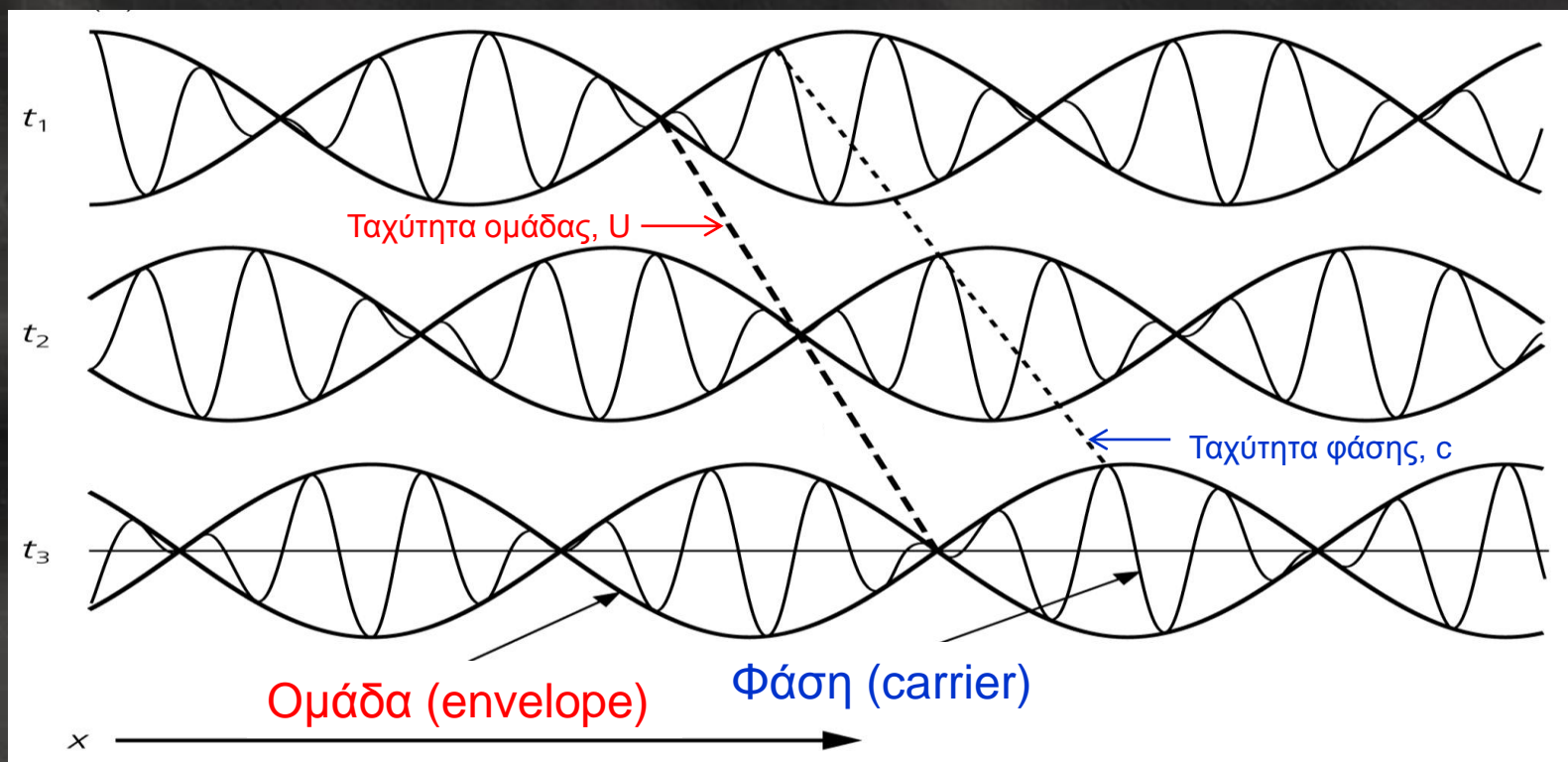
Οι *διακεκομμένες γραμμές* ενώνουν σημεία που αντιστοιχούν στην *ίδια φάση* αλλά έχουν *διαφορετικές περιόδους*. Οι γραμμές δεν είναι ευθείες, άρα δεν έχουν σταθερή κλίση και επομένως η **ταχύτητα φάσης** δεν είναι σταθερή.

Η ταχύτητα φάσης μεταξύ δύο σταθμών που απέχουν απόσταση $\delta\Delta$ είναι **$c = \delta\Delta / \delta t$**

Σκέδαση επιφανειακών κυμάτων (...συνέχεια)

Η ταχύτητα, c , με την οποία διαδίδεται ένα απλό αρμονικό κύμα, λέγεται **ταχύτητα φάσης** (αφού η περίοδός του είναι σταθερή).

Αν θεωρήσουμε ότι η διατάραξη σε ένα σημείο υλικού μέσου αποτελείται από άθροισμα αρμονικών συχνοτήτων συνεχούς φάσματος τότε οι αρμονικές διαταράξεις με κοντινές περιόδους συμβάλλουν δίνοντας διαμορφωμένο κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα ομάδας, U .



Έστω ότι οι αρμονικές διαταράξεις που συμβάλλουν έχουν κυκλικές συχνότητες

$$\omega - \varepsilon < \omega < \omega + \varepsilon$$

Αν η ταχύτητα φάσης αρμονικής διατάραξης με κυκλική συχνότητα ω είναι $c = \omega/k$ (k =κυματάριθμος), τότε η ταχύτητα ομάδας δίνεται από τη σχέση $U = d\omega/dk$.

Επειδή $k = 2\pi/\lambda$ και $\lambda = ct$ προκύπτει ότι η ταχύτητα ομάδας συνδέεται με την ταχύτητα φάσης με τη σχέση:

$$U = c + \kappa \frac{dc}{d\kappa}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k\lambda = 2\pi \Rightarrow kd\lambda + \lambda dk = 0 \Rightarrow dk = -\frac{kd\lambda}{\lambda} \left. \vphantom{\frac{2\pi}{\lambda}} \right\} \Rightarrow$$

$$U = c + k \frac{dc}{dk}$$

$$\Rightarrow U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

$$\lambda = cT \Rightarrow d\lambda = cdT + Tdc \left. \vphantom{\lambda = cT} \right\} \Rightarrow U = c - cT \frac{dc}{cdT + Tdc} \Rightarrow$$

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow U = c - \frac{cT}{c \frac{dT}{dc} + T}$$

Εφαρμογή 4.3

Η ταχύτητα των P- κυμάτων στο νερό είναι $\alpha=1.52 \text{ km/sec}$. Να βρεθούν οι ελαστικές σταθερές μ , E , λ , σ και κ στο νερό

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\mu + \lambda} \Rightarrow E = 0$$

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \Rightarrow \lambda \squareq 2.31 \cdot 10^{10} \text{ dyn / cm}^2$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \sigma = 0.5$$

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Rightarrow \kappa = 2.31 \cdot 10^{10} \text{ dyn / cm}^2$$

Εφαρμογή 4.4

Η ταχύτητα φάσης σκεδασμένου επιφανειακού κύματος είναι $c=1+T/10$ (km/sec). Να βρεθεί η ταχύτητα φάσης, c και η ταχύτητα ομάδας, U , όταν το κύμα έχει περίοδο $T=36$ sec.

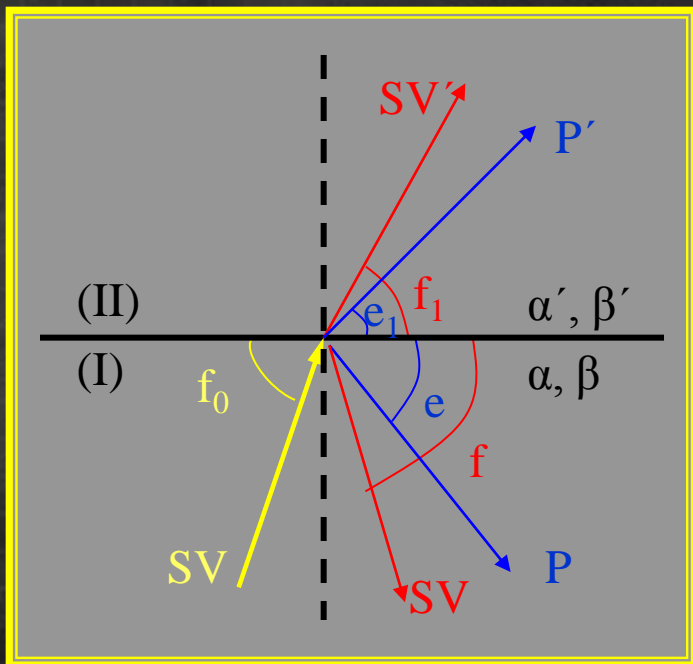
$$c = 1 + \frac{T}{10} \Rightarrow c = 4.6 \text{ km / sec}$$

$$c = 1 + \frac{T}{10} \Rightarrow T = 10c - 10 \Rightarrow \frac{dT}{dc} = 10$$

$$U = c - \frac{cT}{c \frac{dT}{dc} + T} \Rightarrow U = 4.6 - \frac{4.6 \cdot 36}{4.6 \cdot 10 + 36} \Rightarrow U = 2.58 \text{ km / sec}$$

Άσκηση 4.7

Εγκάρσιο κύμα **SV** διαδίδεται σε ομογενές και ισότροπο ελαστικό μέσο **(I)** με ταχύτητα $\beta=4.0 \text{ km/sec}$ και πέφτει στη διαχωριστική επιφάνεια με μέσο **(II)** υπό γωνία $i_0=25^\circ$ ($f_0=65^\circ$). Να σχεδιασθούν οι σεισμικές ακτίνες στα δύο μέσα αν α) ισχύει η σχέση Poisson και στα δύο μέσα και στο μέσο **(II)** είναι $\beta'=3.0 \text{ km/sec}$ β) αν το μέσο **(II)** είναι υγρό με $\alpha'=2.0 \text{ km/sec}$ ενώ για το μέσο **(I)** ισχύει η σχέση Poisson ($\mu=\lambda$).



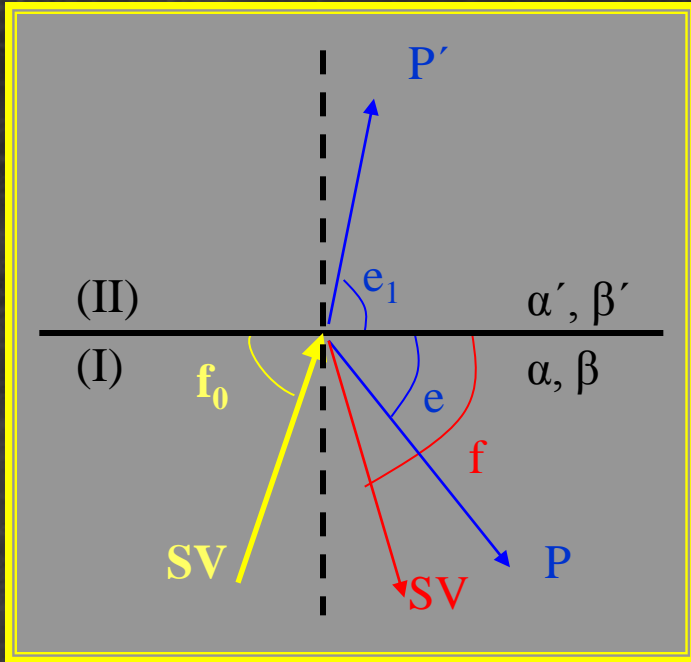
$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{3\mu}{\rho}} = \beta\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6.63 \text{ km/sec} \\ \alpha' = 5.19 \text{ km/sec} \end{cases}$$

Γενικευμένος νόμος του Snell:

$$\frac{\beta}{\sin f_0} (= 9.46) = \frac{\beta}{\sin f} = \frac{\alpha}{\sin e} = \frac{\alpha'}{\sin e_1} = \frac{\beta'}{\sin f_1}$$

$$f = 65.0^\circ, \quad e = 42.9^\circ, \quad f_1 = 71.5^\circ, \quad e_1 = 56.7^\circ$$

Άσκηση 4.7 (... συνέχεια)



$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{3\mu}{\rho}} = \beta\sqrt{3} \Rightarrow a = 6.93 \text{ km/sec}$$

Γενικευμένος νόμος του Snell:

$$\frac{\beta}{\sin f_0} (= 9.46) = \frac{\beta}{\sin f} = \frac{a}{\sin e} = \frac{a'}{\sin e_1}$$

$$f = 65.0^\circ, \quad e = 42.9^\circ, \quad e_1 = 77.8^\circ$$