ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α’ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

Να αποδειχθούν οι σχέσεις

α) $E = \frac{p_{11}}{e_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ μέτρο επιμήκους ελαστικότητας

β) $\sigma = -\frac{e_{22}}{e_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ λόγος Poisson

γ) $\kappa = -\frac{P}{\theta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ μέτρο κυβικής ελαστικότητας, P είναι η υδροστατική πίεση που ασκείται ομοιόμορφα στην επιφάνεια ορισμένου σώματος

ΛΥΣΕΙΣ

α) Το Ε είναι ο λόγος της κάθετης τάσης που ασκείται κατά ορισμένη διεύθυνση. Άρα προς τις άλλες διευθύνσεις οι τάσεις που ασκούνται θα είναι **0**.

Προσθέτω κατά μέλη:

$$p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \qquad (1)$$

$$0 = p_{22} = \lambda\theta + 2\mu e_{22}$$
$$0 = p_{33} = \lambda\theta + 2\mu e_{33}$$

όμως
$$p_{11} = 3\lambda\theta + 2\mu(e_{11} + e_{22} + e_{33})$$
$$\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$
άρα $p_{11} = 3\lambda\theta + 2\mu\theta \Rightarrow$

$$p_{11} = \theta(3\lambda + 2\mu) \Rightarrow \theta = \frac{p_{11}}{3\lambda + 2\mu} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώ στη (1) το θ από την (2)

$$p_{11} = \lambda\left(\frac{p_{11}}{3\lambda + 2\mu}\right) + 2\mu e_{11} \Rightarrow p_{11} - \lambda\left(\frac{p_{11}}{3\lambda + 2\mu}\right) = 2\mu e_{11}$$

Κάνω τα κλάσματα ομώνυμα και έχω:

$$\frac{p_{11}(3\lambda + 2\mu) - \lambda p_{11}}{3\lambda + 2\mu} = 2\mu e_{11} \Rightarrow p_{11}\left(\frac{3\lambda + 2\mu - \lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) = 2\mu e_{11} \Rightarrow p_{11} = \left[\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu}\right] = 2\mu e_{11} \Rightarrow$$

$$\frac{p_{11}}{e_{11}} = \frac{2\mu}{\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu}} = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \frac{p_{11}}{e_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = E$$

β) Ισχύουν τα ίδια για $p_{22} = p_{33} = 0$

Έχουμε:

$$\text{Προσθέτω} \quad \left\langle \begin{array}{l} p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ P_{22} = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \\ p_{33} = \lambda\theta + 2\mu e_{33} \end{array} \right| \Rightarrow p_{22} = 0 \Rightarrow p_{22} = \lambda\theta + 2\mu e_{22} = 0 \Rightarrow$$

γράφω αναλυτικά το θ

$$0 = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \Rightarrow 2\mu e_{22} = -\lambda\theta \Rightarrow e_{22} = -\frac{\lambda\theta}{2\mu} = -\frac{\lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33})}{2\mu} \Rightarrow$$

επειδή $p_{22} = p_{33}$ τότε και $e_{22} = e_{33}$

$$e_{22} = -\frac{(\lambda e_{11} + 2\lambda e_{22})}{2\mu} \Rightarrow e_{22} \cdot 2\mu = -\lambda e_{11} - 2\lambda e_{22} \Rightarrow e_{22} \cdot 2\mu + 2\lambda e_{22} = -\lambda e_{11} \Rightarrow$$

$e_{22}(2\mu + 2\lambda) = -\lambda e_{11}$ διαιρώ και τα δύο μέλη με το e_{11} και έχω:

$$\frac{e_{22}}{e_{11}} \cdot (2\mu + 2\lambda) = -\frac{\lambda e_{11}}{e_{11}} \Rightarrow \frac{e_{22}}{e_{11}} = -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \Rightarrow -\frac{e_{22}}{e_{11}} = \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

γ) Έχω:

$$\left.\begin{array}{l} P = p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ P = p_{22} = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \\ P = p_{33} = \lambda\theta + 2\mu e_{33} \end{array}\right\} +$$

$$3P = 3\lambda\theta + 2\mu\left(e_{11} + e_{22} + e_{33}\right)$$

$$3P = 3\lambda\theta + 2\mu\theta \qquad (1)$$

εξ ορισμού $\kappa = \dfrac{P}{\theta}$ (2)

από τα (1) και (2) έχω:

$$\kappa = \frac{\dfrac{3\lambda\theta + 2\mu\theta}{3}}{\theta} = \qquad (3)$$

$$\frac{3\lambda\theta + 2\mu\theta}{3\theta} = \frac{3\lambda\theta}{3\theta} + \frac{2\mu\theta}{3\theta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Rightarrow \kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

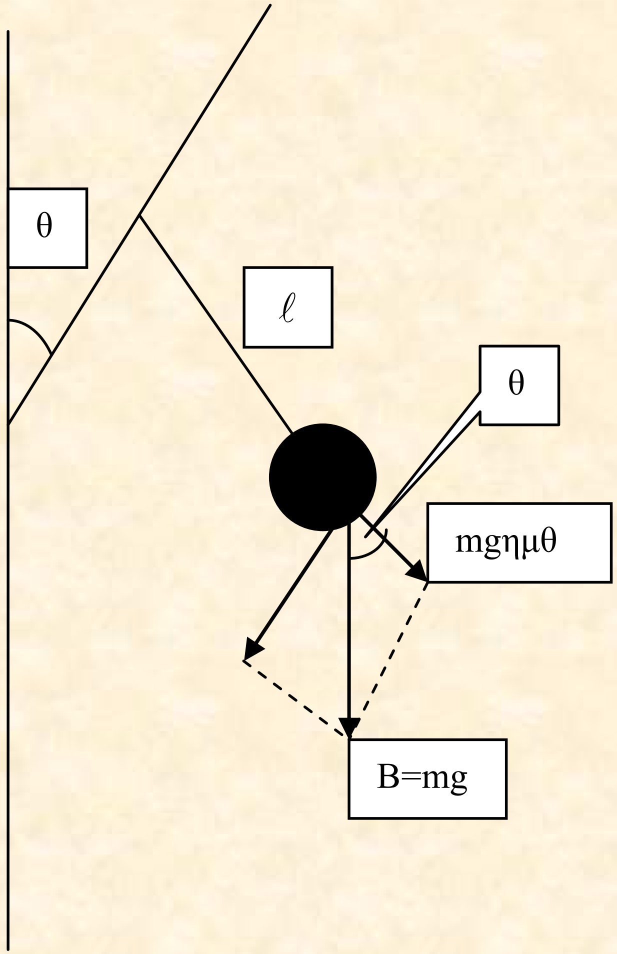
στη σχέση (2) έχω παραλείψει το σημείο (-) διότι εδώ το $\theta = \dfrac{V_o - V}{V}$ δηλαδή όταν ασκείται υδροστατική πίεση το σώμα δεν παραμορφώνεται, μόνο αλλάζει όγκο από έναν αρχικό σε έναν τελικό,

Όμως γνωρίζουμε ότι η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση είναι η μεταβολή του όγκου προς τον αρχικό όγκο, δηλαδή είναι $\theta = \dfrac{V - V_o}{V}$. Αν αυτό ίσχυε στην περίπτωσή μας θα είχαμε $-\theta = \dfrac{V - V_o}{V}$, άρα στη σχέση (2) στην πραγματικότητα έχω $-\theta$, οπότε η σχέση (3) γράφεται:

$$\kappa = \frac{\dfrac{3\lambda\theta + 2\mu\theta}{3}}{(-\theta)}$$

Άσκηση 3.1 του βιβλίου

Η ιδιοπερίοδος, T_o, εκκρεμούς με κεκλιμένο άξονα αιώρησης δίνεται από τη σχέση:



$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\eta\mu\theta}}$$

όπου ℓ είναι το μήκος του εκκρεμούς, δηλαδή, η απόστασή του κέντρου βάρους του από τον άξονα αιώρησης, g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και θ είναι η γωνία που σχηματίζει ο κεκλιμένος άξονας με την κατακόρυφη. Αν το μήκος του εκκρεμούς αυτού είναι ℓ=1 m, ποιά γωνία θ, πρέπει να σχηματίζει ο κεκλιμένος άξονας με την κατακόρυφη ώστε η ιδιοπερίοδος του εκκρεμούς να είναι T_o=6.3 sec; Ποιο πρέπει να είναι το μήκος του κατακόρυφου εκκρεμούς ($\theta=90^o$) ώστε αυτό να έχει την ίδια περίοδο (6.3 sec) με το εκκρεμές κεκλιμένου άξονα αιώρησης:

Τι συμπέρασμα προκύπτει;

ΛΥΣΗ

Η $mg\eta\mu\theta$ δεν φέρνει κανένα αποτέλεσμα γιατί ο φορέα της περνάει από το σημείο αιώρησης

Από την $T_o^2 = \dfrac{4\pi^2 \ell}{g\eta\mu\theta}$ λύνουμε προς ημθ $\eta\mu\theta = \dfrac{4\pi^2 \ell}{gT_o^2}$ (1) όπου

ℓ=1 m
g=10 m/sec
T_o= 6.3 sec

Αν έχουμε 2 εκκρεμή ιδίων περιόδων με κλίσεις θ_1 και θ_2 και μήκη ℓ_1 και ℓ_2, αντίστοιχα έχουμε:

$$\frac{T_o^2 = \dfrac{4\pi^2 \ell_1}{g\eta\mu\theta_1}}{T_o^2 = \dfrac{4\pi^2 \ell_2}{g\eta\mu\theta_2}} \Rightarrow \ell_1 \eta\mu\theta_2 = \ell_2 \eta\mu\theta_1 \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2} \Rightarrow \ell_1 = 1\frac{\eta\mu 90}{\eta\mu\theta}$$

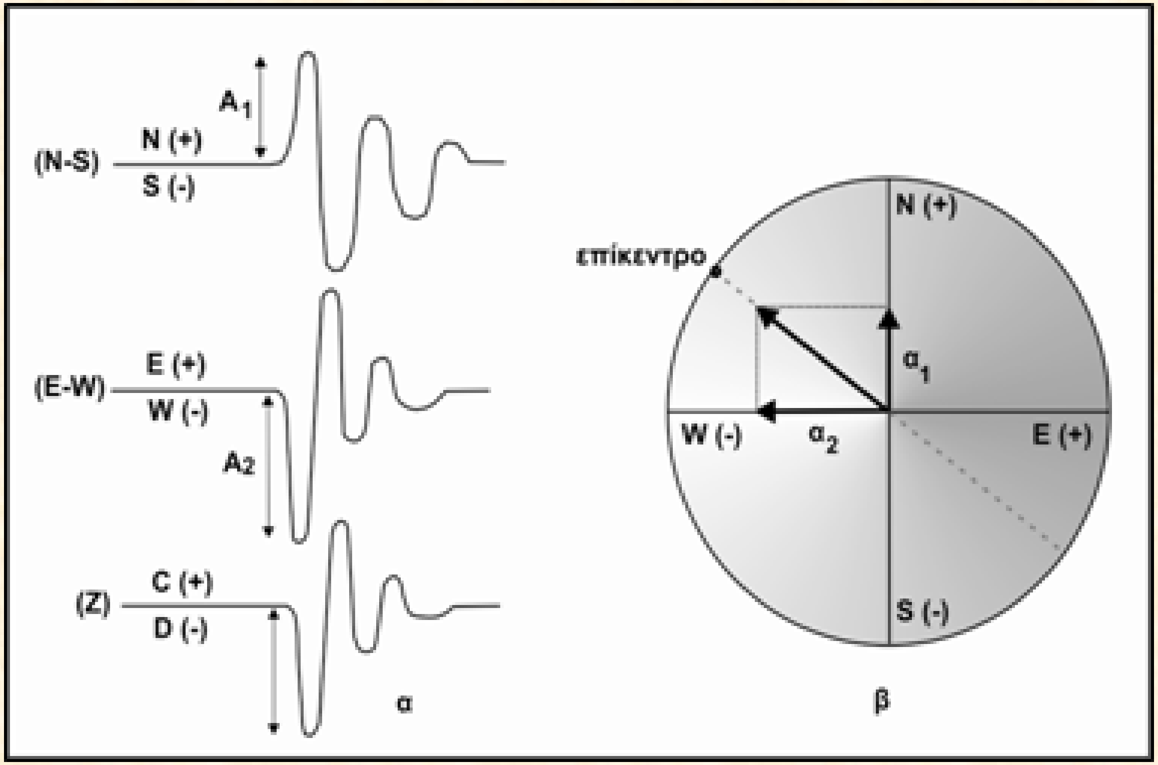
[το ημθ από τη σχέση (1)]

Α Σ Κ Η Σ Η

- Δίνονται 3 σεισμογράμματα τοπικού σεισμού που γράφηκαν στον ίδιο σταθμό από 1 κατακόρυφο (Z) και 2 οριζόντια (NS και EW) σεισμόμετρα. Υποθέτουμε ότι οι μεγεθύνσεις των 2 οριζοντίων σεισμομέτρων είναι ίσες. Να χρησιμοποιηθούν οι πρώτες αποκλίσεις των επιμήκων κυμάτων στα 3 σεισμογράμματα για να βρεθεί το αζιμούθιο του επικέντρου ως προς τον σεισμολογικό σταθμό. Αν ο σταθμός βρίσκεται στη Θεσσαλονίκη και η επικεντρική απόσταση του σταθμού είναι Δ=150 Km, να βρεθεί το επίκεντρο.
- Δίνεται ότι η κλίμακα είναι $1:3\cdot 10^6$

ΛΥΣΗ

Σχηματική παράσταση της εύρεσης του επικέντρου με ένα σταθμό



ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ 4.3 ΒΙΒΛΙΟΥ